PROVA SCRITTA
MATEMATICA DISCRETA – SECONDA PARTE
SOLUZIONI

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA &
CORSO DI LAUREA IN TECNOLOGIE WEB E MULTIMEDIALI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

—
ANNO ACCADEMICO 2009/10 E PRECEDENTI
22 GIUGNO 2011

PRIMA SEZIONE

- (1) Se la matrice quadrata A è simile alla matrice quadrata B , allora $\det(A) = \det(B)$. **V**
- (2) Esistono spazi vettoriali di dimensione $n > 0$ che ammettono solo un numero finito di basi. **F**
- (3) Il nucleo della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è lo spazio vettoriale nullo. **V**
- (4) Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è somma diretta dei suoi sottospazi $U_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ e $U_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$. **V**
- (5) Tutte le matrici quadrate a coefficienti reali sono diagonalizzabili sui reali. **F**

SECONDA SEZIONE

- (1) Si consideri l'omomorfismo $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - 2y \\ z' = -2x - 4y, \end{cases}$$

dove (x, y) è il generico vettore di $\mathbb{R}^2$ e (x', y', z') rappresenta il vettore di $\mathbb{R}^3$ immagine di (x, y) tramite l'applicazione ψ ;

- (a) determinare i sottospazi $\ker \psi$ e $\text{Im } \psi$, le loro dimensioni e una loro base;
- (b) determinare l'eventuale immagine inversa del vettore $v' := (-1, 1, 2)$; tale immagine inversa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?
- (c) trovare la matrice di ψ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ e determinare il suo rango.

Soluzione. (??): la matrice associata a ψ è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix};$$

poiché la seconda colonna di A è il doppio della prima colonna, il rango di A è uno.

(??): $\ker \psi$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0; \end{cases}$$

siccome la matrice del sistema è la matrice A che ha rango uno, abbiamo che le soluzioni sono date dall'equazione $x = -2y$, ovvero $\ker \psi = L(2, -1)$. Sempre perché A ha rango uno, $\text{Im } \psi$ è generato da una delle colonne di A , ovvero $\text{Im } \psi = L(1, -1, -2)$.

(??): l'eventuale immagine inversa di v' è data dalle (eventuali) soluzioni del sistema

$$(0.1) \quad \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -x - 2y = 1 \\ -2x - 4y = 2; \end{cases}$$

poiché la matrice dei coefficienti del sistema (??) è A che ha rango uno, per avere delle soluzioni, il sistema (??) deve avere la sua matrice completa di rango uno; tale matrice è

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix};$$

poiché la terza riga di A' è l'opposto della prima riga, tale matrice ha effettivamente rango uno. Abbiamo allora che il sistema (??) è equivalente all'equazione $x + 2y = -1$, e questo definisce il sottospazio affine di $\mathbb{R}^2$ di dimensione uno dato dall'immagine inversa di v' . Tale sottospazio affine non è un sottospazio vettoriale poiché – per esempio – è dato dalle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo.

- (2) Si consideri il seguente sistema lineare a parametro $k \in \mathbb{R}$ di tre equazioni nelle due incognite x e y

$$\begin{cases} (k-4)x + 3y = 1 \\ -x + ky = -1 \\ -x + y = k. \end{cases}$$

- Determinare le eventuali soluzioni del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$;
- se A_k è la matrice completa del sistema, trovare gli autovalori della matrice A_1 ;
- dopo avere trovato gli autospazi di A_1 , dire se tale matrice è diagonalizzabile e trovare la matrice diagonale simile ad A_1 .

Soluzione. (??): riduciamo a scala la matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} k-4 & 3 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & (k-1)(k-3) & 5-k \\ 0 & k-1 & -1-k \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k-1 & -1-k \\ 0 & 0 & (k-1)(k-2) \end{pmatrix}$$

ne deduciamo che se $k \neq 1, 2$ il sistema sicuramente non ha soluzione. Anche se $k = 1$ il sistema non ha soluzione, avendo che la riduzione a scala del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se invece $k = 2$, si ha che la riduzione a scala del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque abbiamo $x = -5$ e $y = -3$.

(??): abbiamo che il polinomio caratteristico di A_1 è

$$\det(A_1 - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 3 & 1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 1);$$

quindi gli autovalori di A_1 sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$, di molteplicità algebrica, rispettivamente, due e uno.

(??): troviamo gli autospazi; per prima cosa troviamo quello per l'autovalore $\lambda_1 = 0$, ovvero cerchiamo il nucleo di A_1 ; riduciamo a scala A_1 :

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui deduciamo $z = 0$ e $x = y$, ovvero $\ker A_1 = L(1, 1, 0)$ e dunque l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha dimensione uno; siccome la molteplicità algebrica di $\lambda_1 = 0$ è due, deduciamo subito che A_1 non è diagonalizzabile.

Per l'autovalore $\lambda_2 = -1$, dobbiamo trovare il nucleo di $A + I_3$; riduciamo a scala tale matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui deduciamo $y = 3z$ e $x = 5z$, ovvero l'autospazio cercato è $V_{-1} = L(5, 1, 3)$.

(3) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino i seguenti vettori

$$v_1 := (1, 1, 1), \quad v_2 := (1, 2, 3), \quad v_3 := (1, 1, 2);$$

- (a) dimostrare che i vettori v_1, v_2 e v_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$;
- (b) determinare le coordinate dei vettori $v := (5, 3, -1)$ e $w := (2, -1, 3)$ rispetto alla base $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$;
- (c) se $W := L(v, w)$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori v e w , trovare un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ supplementare a W . Tale sottospazio supplementare è unico?

Soluzione. (??): per dimostrare che i vettori formano una base, basta vedere che la matrice che ha come righe i tre vettori ha rango tre; per fare ciò, riduciamola a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi i tre vettori formano una base.

(??): dobbiamo trovare tre scalari x, y e z tali che $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = -1. \end{cases}$$

Considerando la matrice completa di questo sistema e riducendola a scala otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi le coordinate di v sono $(9, -2, -2)$.

Analogamente per w : dobbiamo trovare tre scalari x , y e z tali che $xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 3. \end{cases}$$

Considerando la matrice completa di questo sistema e riducendola a scala otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

quindi le coordinate di w sono $(-2, -3, 7)$.

(??): è immediato verificare che v e w sono linearmente indipendenti; ne consegue che W è uno spazio vettoriale di dimensione due; per risolvere l'esercizio basterà quindi – per la formula di Grassmann – trovare un vettore $u \in \mathbb{R}^3$ tale che (v, w, u) sia una base di $\mathbb{R}^3$, e allora lo spazio richiesto sarà $L(u)$. Vediamo per esempio che se prendiamo $u = e_1 = (1, 0, 0)$, allora (v, w, u) è una base di $\mathbb{R}^3$: consideriamo la matrice che ha per colonne i tre vettori e riduciamola a scala:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dunque $L(e_1)$ è uno spazio supplementare di W . Ovviamente tale spazio non è unico, visto che – per esempio – $L(e_1 + w)$ è un altro spazio supplementare.