PROVA SCRITTA
MATEMATICA DISCRETA – SECONDA PARTE
SOLUZIONI

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA &
CORSO DI LAUREA IN TECNOLOGIE WEB E MULTIMEDIALI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDÎ DI UDINE
—
ANNO ACCADEMICO 2010/11
21 GIUGNO 2011

Prima sezione

(1) Il sistema $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ di due equazioni in una incognita x ha due soluzioni. **F**

(2) La base $\{(1,1),(1,0)\}$ dello spazio $\mathbb{R}^2$ (dotato della metrica standard) è una base ortonormale. **F**

(3) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale. **V**

(4) Il nucleo di un'applicazione lineare è uno spazio vettoriale. **V**

(5) Esistono matrici di cambio base a determinante nullo. **F**

Seconda sezione

(1) Si consideri uno spazio vettoriale reale V di dimensione due e sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una sua base. Sia $f\colon V \to V$ l'endomorfismo lineare di V che – rispetto alla base $\mathcal{B}$ – è espresso tramite la seguente matrice 2×2:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

(a) determinare autovalori e autospazî di f e mostrare che f è diagonalizzabile;
(b) scelta una base $\mathcal{B}'$ di autovettori di V, si trovi la matrice di cambio base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, e si determini inoltre l'inversa di questa matrice;
(c) trovare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}'$, e mostrare esplicitamente che tale matrice è simile alla matrice A.

Soluzione. (1a): il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 6-\lambda & 8 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right) = (6-\lambda)(4-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda-8)(\lambda-2),$$

e quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$; siccome la matrice A è 2×2 e ha due autovalori distinti, ne deduciamo che A e quindi f sono diagonalizzabili.

Troviamo ora gli autospazî. Cominciamo col trovare l'autospazio relativo a $\lambda_1 = 8$ per A; ciò equivale a trovare i vettori ${}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{pmatrix} 6-8 & 8 \\ 1 & 4-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ovvero a trovare le soluzioni del sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite x e y

$$\begin{cases} -2x + 8y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases} ;$$

la matrice associata a tale sistema ha rango 1 (come ci aspettavamo) e quindi basta prendere una delle due equazioni del sistema; ne deduciamo che l'autospazio per A è $L({}^t(4, 1))$ e quindi l'autospazio relativo a $\lambda_1 = 8$ per f è $V_8 = L(4v_1 + v_2)$.

Analogamente per $\lambda_2 = 2$; trovare l'autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$ per A equivale a trovare i vettori ${}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{pmatrix} 6-2 & 8 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ovvero a trovare le soluzioni del sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite x e y

$$\begin{cases} 4x + 8y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} ;$$

la matrice associata a tale sistema ha rango 1 (come ci aspettavamo) e quindi basta prendere una delle due equazioni del sistema; ne deduciamo che l'autospazio per A è $L({}^t(2, -1))$ e quindi l'autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$ per f è $V_2 = L(2v_1 - v_2)$.

(1b): da quanto fatto sopra, possiamo scegliere come base di autovettori $\mathcal{B}' = (w_1, w_2) := (4v_1 + v_2, 2v_1 - v_2)$; ne consegue che la matrice richiesta – che denotiamo con P – ha per colonne le coordinate dei vettori w_1 e w_2 rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$P := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Infine, calcoliamo l'inversa di P:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(1c): ovviamente la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è una matrice diagonale, e gli elementi sulla diagonale sono gli autovalori relativi agli autovettori scelti, quindi tale matrice è

$$M(f) := \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'ultima richiesta è di verificare esplicitamente che $M(f) = P^{-1}AP$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = M(f).$$

(2) Si considerino i seguenti vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ (con la metrica standard):

$$v_1 := (-1, 0, -1, -1), \qquad v_2 := (-1, 0, 2, 0), \qquad v_3 := (-1, 1, 0, -2),$$

e sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da questi vettori;
(a) trovare una base ortonormale per V;
(b) trovare una base del complemento ortogonale di V;
(c) calcolare il valore dell'angolo tra v_1 e v_3.

Soluzione. (2a): è immediato verificare che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti; utilizzando Gram-Schmidt, troviamo per prima cosa una base ortogonale (v_1', v_2', v_3') di V: $v_1' := -v_1$, da cui $\|v_1\|^2 = \|v_1'\|^2 = 3$;

$$v_2' := v_2 - \frac{\langle v_1', v_2\rangle}{\|v_1'\|^2} v_1' = (-\frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3});$$

da cui $\|v_2'\|^2 = \frac{14}{3}$;

$$v_3'' := v_3 - \frac{\langle v_1', v_3\rangle}{\|v_1'\|^2} v_1' - \frac{\langle v_2', v_3\rangle}{\|v_2'\|^2} v_2' = (\frac{4}{7}, 1, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7});$$

da cui $\|v_3'\|^2 = \frac{15}{7}$, e quindi una base ortonormale per V è

$$(\frac{v_1'}{\|v_1'\|}, \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \frac{v_3'}{\|v_3'\|}) = ((\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}, 0, \frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}), (\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}})).$$

(2b) Il complemento ortogonale $V^\perp$ di V è

$$V^\perp := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid \langle (x, y, z, w), v\rangle = 0, \forall v \in V\};$$

ovviamente, $v := (x, y, z, w) \in V^\perp$ se e solo se tale vettore è ortogonale contemporaneamente a v_1, v_2 e v_3, ovvero per trovare $V^\perp$ occorre e basta risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} (\langle v, v_1\rangle =) - x - z - w = 0 \\ (\langle v, v_2\rangle =) - x + 2z = 0 \\ (\langle v, v_3\rangle =) - x + y - 2w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z \\ w = -3z \\ y = -4z \end{cases}$$

quindi $V^\perp = L(2, 4, 1, -3)$ e una base è dunque $((2, -4, 1, -3))$.

(2c): avendosi $\|v_1\| = \sqrt{3}$, $\|v_3\| = \sqrt{6}$ e $\langle v_1, v_3\rangle = 3$, se α è l'angolo cercato, abbiamo

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v_1, v_3\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi il valore di α, in radianti, è $\frac{\pi}{4}$.

(3) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato della metrica standard, si considerino i seguenti vettori

$$v_1 := (2, -5, -1), \qquad v_2 := (-1, 0, -2),$$

e sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato da questi vettori.
(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del piano π parallelo a V e passante per il punto $P := (1, 0, 1)$;
(b) si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta ℓ ortogonale a π e passante per il punto $Q := (2, 1, 0)$;
(c) trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, tale che due vettori di detta base appartengano a V.

Soluzione. (3a): le equazioni parametriche di π seguono immediatamente dalla sua definizione:

$$\begin{cases} x = 1 + 2u - v \\ y = -5u \\ z = 1 - u - 2v; \end{cases}$$

eliminando i due parametri u e v otteniamo le equazioni cartesiane di π: $2x + y - z - 1 = 0$.

(3b): il vettore $v_3 := (2, 1, -1)$ è ortogonale al piano π, quindi tale vettore è parallelo ad ℓ, e dunque le equazioni di ℓ sono

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t; \end{cases}$$

eliminando il parametro t otteniamo le equazioni cartesiane di ℓ:

$$\begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

(3c): è immediato verificare che v_1 e v_2 sono ortogonali; inoltre, il vettore v_3 – essendo ortogonale a π e a V – è ortogonale a v_1 e v_2. Quindi (v_1, v_2, v_3) è una base ortogonale con $v_1, v_2 \in V$, e dunque una base richiesta è $(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}) = ((\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{5}), (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}))$.