PROVA SCRITTA
MATEMATICA DISCRETA – SECONDA PARTE
SOLUZIONI

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA &
CORSO DI LAUREA IN TECNOLOGIE WEB E MULTIMEDIALI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDÎ DI UDINE
—
ANNO ACCADEMICO 2009/10 E PRECEDENTI
19 LUGLIO 2011

Prima sezione

(1) Uno spazio vettoriale reale V di dimensione uno contiene infiniti vettori. **V**

(2) I vettori $(0,0), (1,1), (2,2)$ generano lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$. **F**

(3) Un autovalore di una matrice quadrata è uno scalare. **V**

(4) L'insieme vuoto ammette una struttura di spazio vettoriale reale ma non complesso. **F**

(5) Se A è una matrice quadrata tale che $\det(A) < 0$, allora le sue righe sono linearmente dipendenti. **F**

Seconda sezione

(1) Si considerino le seguenti matrici

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad B_\lambda := \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dove λ è un parametro reale.

(a) Si moltiplichino le due matrici in modo tale da ottenere una matrice 3×3 – che denotiamo con C_λ – e si determini qual è il rango di C_λ in funzione del parametro λ;

(b) si determinino i valori (reali) del parametro λ per cui C_λ è diagonalizzabile;

(c) posto $\lambda = 1$, si determinino gli autovalori e gli autospazî di C_1, e si determini l'eventuale matrice diagonale simile a C_1.

Soluzione. (**??**): è chiaro che per ottenere una matrice 3×3 dobbiamo eseguire la seguente moltiplicazione

$$A_\lambda B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 & \lambda \\ -1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} = C_\lambda;$$

osserviamo che la prima e la terza riga di C_λ sono uguali, dunque il suo rango è al più 2; la seconda riga di C_λ è non nulla per qualunque valore del parametro λ; inoltre la prima riga è un multiplo della seconda solo se tale riga è nulla, e quindi se e solo se $\lambda = 0$; in conclusione, C_λ ha rango due se $\lambda \neq 0$ e se $\lambda = 0$ allora C_0 ha rango 1.

(**??**): calcoliamo il polinomio caratteristico di C_λ:

$$\begin{aligned} P_x(C_\lambda - xI_3) &:= \det \begin{pmatrix} -x & \lambda^2 & \lambda \\ -1 & -x & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda - x \end{pmatrix} \\ &= -x(-x(\lambda - x) - \lambda^3) + (\lambda^2(\lambda - x) - \lambda^3) \\ &= -x(x^2 - \lambda x - \lambda^3 + \lambda^2) \\ &= -x(x - \lambda\frac{1+\sqrt{4\lambda - 3}}{2})(x - \lambda\frac{1-\sqrt{4\lambda-3}}{2}) \end{aligned}$$

per cui se $\lambda < \frac{3}{4}$ la matrice non è diagonalizzabile sui reali; vediamo ora quando le tre radici $x_1 = 0$, $x_2 = \lambda\frac{1+\sqrt{4\lambda-3}}{2}$ e $x_3 = \lambda\frac{1-\sqrt{4\lambda-3}}{2}$ del polinomio coincidono: è immediato verificare che le tre radici coincidono se e solo se $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e ciò accade se e solo se $\lambda = 0$; ma $C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è la matrice nulla, per cui per tale valore C_o non è diagonalizzabile.

Supponiamo ora $\lambda \neq 0$; è chiaro che $x_1 = x_2$ se $-1 = \sqrt{4\lambda - 3}$ (con l'usuale convenzione $\sqrt{4\lambda-3} = |\sqrt{4\lambda-3}|$), e tale equazione non ha soluzioni nei reali, quindi, nei reali, se $\lambda \neq 0$, allora $x_1 \neq x_2$.

Invece $0 = x_1 = x_3$ se $1 = \sqrt{4\lambda-3}$, ovvero $\lambda = 1$. In tale ipotesi, $x_2 = 1$. La matrice $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha, come è immediato verificare, rango 2, e quindi la matrice non è diagonalizzabile, visto che l'autovalore $x_1 = 0$ ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 1.

Infine, $x_2 = x_3$ se $\sqrt{4\lambda-3} = 0$, ovvero $\lambda = \frac{3}{4}$; per tale valore abbiamo $x_2 = x_3 = \frac{3}{8}$; dobbiamo come al solito trovare il rango della matrice $C_{\frac{3}{4}} - \frac{3}{8}I_3$, e per fare questo, riduciamola a scala:

$$C_{\frac{3}{4}} - \frac{3}{8}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{9}{16} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -8 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

con tutta evidenza $C_{\frac{3}{4}} - \frac{3}{8}I_3$ ha rango 2 e quindi anche in questo caso $C_{\frac{3}{4}}$ non è diagonalizzabile.

In conclusione, C_λ è diagonalizzabile sui reali se $\frac{3}{4} < \lambda < 1$ e $\lambda > 1$.

(**??**): per il punto (**??**), già sappiamo che $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile, e che gli autovalori sono $0 = x_1 = x_3$ e $x_2 = 1$. Calcoliamo gli autospazî: per $x_1 = 0$, dobbiamo trovare il nucleo di C_1, e per fare ciò riduciamo a scala C_1:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $x_1 = x_3 = -x_2$ e quindi l'autospazio è $V_0 = L(1, -1, 1)$.

Analogamente, per $x_2 = 1$, dobbiamo trovare il nucleo di $C_1 - I_3$, e quindi riduciamo a scala questa matrice

$$C_1 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque $x_2 = 0$ e $x_1 = x_2$, ovvero l'autospazio è $V_1 = L(1, 0, 1)$.

(2) Si consideri il seguente sistema lineare a parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ di quattro equazioni nelle tre incognite x, y e z

$$\begin{cases} x - \lambda z = -1 \\ 2y - \lambda z = -1 \\ 2x - \lambda z = \lambda - 1 \\ \lambda x - 2y - 2\lambda z = -2\lambda - 2. \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema ha soluzioni;

(b) se A_λ è la matrice completa del sistema e λ_0 è un valore del parametro per cui il sistema ha soluzioni, trovare l'inversa di un minore non nullo di rango massimo di A_{λ_0} (qui per *minore non nullo* di A_{λ_0} intendiamo una matrice quadrata a determinante non nullo ottenuta da A_{λ_0} eliminando da essa alcune righe e alcune colonne);

(c) trovare lo spazio vettoriale V_{λ_0} parallelo allo spazio affine delle soluzioni del sistema per ciascun λ_0 e lo spazio vettoriale supplementare a V_{λ_0} in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. (**??**): riduciamo a scala la matrice completa del sistema:

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 0 & -\lambda & \lambda - 1 \\ \lambda & -2 & -2\lambda & -2\lambda - 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda + 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda & -\lambda - 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 + \lambda \end{pmatrix}$$

dall'ultima riga deduciamo che, per avere soluzioni, necessariamente dobbiamo avere o $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$; ma per $\lambda = 0$ abbiamo che la penultima riga della matrice ha solo il termine noto e quindi il sistema non può avere soluzioni, mentre per $\lambda = 1$ il sistema ammette soluzioni, che sono $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 2$.

In conclusione, l'unico valore di λ per cui il sistema ha soluzione è $\lambda_0 = 1$.

(**??**): abbiamo che, per il punto (**??**), $\lambda_0 = 1$, per cui

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

e prendiamo ad esempio il minore ottenuto eliminando l'ultima riga e l'ultima colonna:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

come è immediato verificare, A ha rango tre, che è uguale al rango di A_1; passiamo dunque a calcolare la sua inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(**??**): poiché da (**??**) sappiamo che il sistema ammette soluzioni solo per $\lambda = 1$ e il sistema ammette in tal caso l'unica soluzione $(x, y, z) = (1, \frac{1}{2}, 2)$, abbiamo che lo spazio vettoriale associato a tale spazio affine è lo spazio vettoriale nullo: $V_1 = \{0\}$. Ne consegue che lo spazio supplementare è tutto lo spazio ambiente, cioè $\mathbb{R}^3$.

(3) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i seguenti sottospazî vettoriali

$$V_1 := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0,\ x + 2y + 3z + 4w = 0\}$$
$$V_2 := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x + 3y + 2z + w = 0,\ 4x + 2y + 3w = 0\}$$

e sia $V := V_1 \cap V_2$ il sottospazio vettoriale intersezione di V_1 e V_2. Si determini

(a) la dimensione di V e si trovi una sua base;
(b) la dimensione dello spazio $V_1 + V_2$ generato da V_1 e V_2, la sua dimensione e una sua base;
(c) un sistema lineare che abbia come soluzione lo spazio affine $V+(1, 0, 1, 0)$.

Soluzione. (**??**): è chiaro che l'intersezione V è data dalle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 2z + w = 0 \\ 4x + 2y + 3w = 0; \end{cases}$$

riduciamo a scala la matrice associata a questo sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(V) = 1$, più precisamente abbiamo $w = 0$, $y = -2z$ e $x = z$, quindi $V = L(1, -2, 1, 0)$ e $(1, -2, 1, 0)$ è una base di V.

(**??**): per la relazione di Grassmann, poiché è immediato osservare che $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2$, abbiamo che $\dim(V_1 + v_2) = 4 - \dim(V) = 3$. Più precisamente, essendo V_1 e V_2 date dalle soluzioni dei sistemi

$$V_1 : \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \end{cases} \qquad V_2 : \begin{cases} 4x + 3y + 2z + w = 0 \\ 4x + 2y + 3w = 0 \end{cases}$$

e riducendo le rispettive matrici associate a scala

$$V_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad V_2 : \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

per V_1 abbiamo $x = z + 2w$ e $y = -2z - 3w$, e quindi otteniamo che $V_1 = L((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$, mentre per V_2 abbiamo $4x = 4z - 7w$ e $y = -2z + 2w$, quindi $V_2 = L((1, -2, 1, 0), (-7, 8, 0, 4)$.

Ne deduciamo che $V_1 + V_2 = L((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1), (-7, 8, 0, 4))$ e una base di $V_1 + V_2$ è $((1, -2, 1, 0), (1, -3, 0, 1), (-7, 8, 0, 4))$.

(**??**): poiché V è dato dalle seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$

dove t è un parametro reale, abbiamo che equazioni parametriche per $V + (1,0,1,0)$ sono date da

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t \\ z = t + 1 \\ w = 0; \end{cases}$$

eliminando il parametro t, otteniamo il sistema richiesto:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2z + y = 2 \\ w = 0. \end{cases}$$