PROVA SCRITTA
MATEMATICA DISCRETA – SECONDA PARTE
SOLUZIONI

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA &
CORSO DI LAUREA IN TECNOLOGIE WEB E MULTIMEDIALI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDÎ DI UDINE
—
ANNO ACCADEMICO 2010/11
18 LUGLIO 2011

Prima sezione

(1) Se $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ è uno spazio euclideo e $v, w \in V$ sono due vettori di lunghezza, rispettivamente, 3 e 4 tali che $\langle v, w, \rangle = 0$, allora il vettore $v + w$ ha lunghezza maggiore di 7. **F**

(2) L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **F**

(3) Un autospazio di una matrice quadrata può ridursi al solo vettore nullo. **F**

(4) Esistono matrici quadrate invertibili con determinante < 0. **V**

(5) Se una matrice quadrata è diagonalizzabile, allora il suo determinante non può essere nullo. **F**

Seconda sezione

(1) Si consideri l'applicazione $\psi \colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ – dove $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ denota lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più tre – data da $\psi(P) := P' - P''$, dove P' e P'' denotano, rispettivamente, la derivata prima e la derivata seconda del polinomio P (ovvero se $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$, allora $P' = 3ax^2 + 2bx + c$ e $P'' := (P')'$).
  (a) L'applicazione ψ è suriettiva? È iniettiva?
  (b) L'applicazione ψ ̀lineare? In tale caso determinare la matrice associata a ψ rispetto alla base canonica $(1, x, x^2, x^3)$ di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$.
  (c) Trovare il nucleo di ψ.

Soluzione. È facile rendersi conto che per risolvere (1a) e (1c), può essere utile prima risolvere (1b), quindi cominciamo con rispondere a quest'ultimo quesito. Innanzitutto, dalla definizione di derivata abbiamo che, se $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è il generico elemento di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, allora

$$P'' = (P')' = (3ax^2 + 2bx + c)' = 6ax + 2b,$$

da cui

$$\psi(P) = P' - P'' = 3ax^2 + 2bx + c - (6ax + 2b) = 3ax^2 + 2(b - 3a)x + c - 2b. \tag{0.1}$$

Ora, dimostrare che ψ è una applicazione lineare è una banale verifica: se $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $Q = ex^3 + fX^2 + gx + h$ sono due generici elementi di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, e λ e μ sono due scalari, abbiamo che

$$\begin{aligned}\lambda P + \mu Q &= \lambda(ax^3 + bx^2 + cx + d) + \mu(ex^3 + fx^2 + gx + h)\\ &= (\lambda a + \mu e)x^3 + (\lambda b + \mu f)x^2 + (\lambda c + \mu g)x + \lambda d + \mu h,\end{aligned}$$

per cui, ricordando (0.1)

$$\begin{aligned}\psi(\lambda P + \mu Q) &= 3(\lambda a + \mu e)x^2 + 2(\lambda b + \mu f - 3(\lambda a + \mu e))x + \lambda c + \mu g - 2(\lambda b + \mu f)\\ &= \lambda(3ax^2 + 2(b - 3a)x + c - 2b) + \mu(3ex^2 + 2(f - 3e)x + g - 2f)\\ &= \lambda\psi(P) + \mu\psi(Q).\end{aligned}$$

La matrice dell'endomorfismo lineare ψ rispetto alla base $(1, x, x^2, x^3)$ è quindi

$$M(\psi) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché l'ultima riga e la prima colonna sono nulle, l'applicazione ψ non è né iniettiva né suriettiva e quindi abbiamo risposto a (1a).

Per trovare il nucleo, basta porre $\psi(P) = 0$ e, per (0.1), equivale a richiedere

$$3ax^2 + 2(b - 3a)x + c - 2b = 0;$$

per il principio di identità dei polinomi, ciò significa $3a = 2(b - 3a) = c - 2b = 0$, e quindi $a = b = c = 0$, ovvero $\ker(\psi)$ è dato dai polinomi costanti.

(2) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ (con la metrica standard) si considerino i seguenti sottospazî vettoriali

$$\begin{aligned}V_1 &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0\},\\ V_2 &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}\end{aligned}$$

e sia $V_1 \cap V_2 =: V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale intersezione di questi

(a) Determinare la dimensione di V e dello spazio vettoriale generato da V_1 e V_2;
(b) trovare una base ortogonale di V;
(c) trovare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 0, 0)$ su V.

Soluzione. Ovviamente V è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo seguente

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

consideriamo la matrice associata e riduciamola a scala

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice ha dunque rango 3; ne consegue che V ha dimensione 1; più precisamente, $V = L(-2, 1, -1, 2)$ e quindi una base ortogonale di V è $(-2, 1, -1, 2)$ e il punto (2b) è dimostrato.

Siccome $\dim(V_1) = 2$ e $\dim(V_2) = 3$, abbiamo che, per la relazione di Grassmann, $\dim(V_1 + V_2) = 4$, ovvero $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$, e il punto (2a) è dimostrato.

La proiezione ortogonale di $(1,1,0,0)$ su V è

$$P_V(1,1,0,0) = \frac{\langle(1,1,0,0),(-2,1,-1,2)\rangle}{\|(-2,1,-1,2)\|^2}(-2,1,-1,2) = (\frac{1}{5},-\frac{1}{10},\frac{1}{10},-\frac{1}{5}),$$

e abbiamo risolto anche il punto (2c).

(3) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato della metrica standard, si considerino le seguenti rette

$$r_1 := \begin{cases} 2x_1+5x_2=1 \\ 2x_3=1, \end{cases} \qquad r_2 := \begin{cases} x_2=0 \\ 2x_1+3x_3=1, \end{cases} \qquad r_3 := \begin{cases} x_2+2x_3=7 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

Si determinino quali di queste rette sono
  (a) incidenti, e in tal caso, determinare equazioni parametriche del piano che le contiene;
  (b) ortogonali;
  (c) sghembe.

Soluzione. (3a): cerchiamo quali di queste rette sono incidenti; le intersezioni sono date dalle eventuali soluzioni dei seguenti sistemi:

$$r_1\cap r_2 : \begin{cases} 2x_1+5x_2=1 \\ 2x_3=1 \\ x_2=0 \\ 2x_1+3x_3=1, \end{cases} \qquad r_1\cap r_3 : \begin{cases} 2x_1+5x_2=1 \\ 2x_3=1 \\ x_2+2x_3=7 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=2, \end{cases} \qquad r_2\cap r_3 : \begin{cases} x_2=0 \\ 2x_1+3x_3=1 \\ x_2+2x_3=7 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=2; \end{cases}$$

cominciamo a risolvere il sistema di $r_1\cap r_2$; poiché il determinante della matrice completa del sistema è

$$\det\begin{pmatrix} 2&5&0&1\\ 0&0&2&1\\ 0&1&0&0\\ 2&0&3&1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2&0&1\\ 0&2&1\\ 2&3&1 \end{pmatrix} = -(2(2-3)+2(-2)) = 6,$$

r_1 ed r_2 non si incontrano.

Passiamo al sistema di $r_1\cap r_3$; riduciamo la matrice completa a scala

$$\begin{pmatrix} 2&5&0&1\\ 0&0&2&1\\ 0&1&2&7\\ 2&5&2&2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2&5&0&1\\ 0&1&2&7\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2&5&0&1\\ 0&1&0&6\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2&0&0&-29\\ 0&1&0&6\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

e quindi $r_1\cap r_3 = \{(-\frac{29}{2},6,\frac{1}{2})\}$.

Per finire, guardiamo il sistema di $r_2\cap r_3$; poiché il determinante della matrice completa del sistema è

$$\det\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 2&0&3&1\\ 0&1&2&7\\ 2&5&2&2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 0&2&7\\ 2&2&2 \end{pmatrix} = -2(4-14+21-2) = -18,$$

r_2 ed r_3 non si incontrano.

Determiniamo ora il piano che contiene r_1 ed r_3: poiché $2x_1+5x_2+2x_3 = 2$, che è una delle due equazioni che definiscono r_3, è ottenuta sommando membro a membro le due equazioni che definiscono r_1, cioè $2x_1+5x_2=1$ e $2x_3=1$, deduciamo che $2x_1+5x_2+2x_3-2=0$ è l'equazione cartesiana del piano cercato. Equazioni parametriche sono immediatamente trovate:

$$\begin{cases} x_1 = -5u - v + 1 \\ x_2 = 2u \\ x_3 = v. \end{cases}$$

(3b): poiché l'unico caso in cui le rette si incontrano è quello delle rette r_1 ed r_3, troviamo per prima cosa equazioni parametriche per tali rette:

$$r_1 = \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{2}t + \frac{1}{2} \\ x_2 = t \\ x_3 = \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad r_3 = \begin{cases} x_1 = 4t' - \frac{33}{2} \\ x_2 = -2t' + 7 \\ x_3 = t' \end{cases}$$

dobbiamo verificare se i due vettori $v_1 := (-\frac{5}{2}, 1, 0)$ e $v_3 := (4, -2, 1)$, ovvero i vettori di direzione, rispettivamente, di r_1 ed r_3, sono ortogonali, ma

$$\langle v_1, v_3 \rangle = -10 - 2 = -12$$

e quindi le due rette non sono ortogonali.

Nel caso non si richiedesse alle due rette di incontrarsi, allora dovremmo considerare equazioni parametriche anche per r_2:

$$r_2 := \begin{cases} x_1 = -3t'' + \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2t'' \end{cases}$$

e il vettore di direzione di r_2 è $v_2 := (-3, 0, 2)$, per cui abbiamo

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{13}{2} \qquad \langle v_2, v_3 \rangle = -12 + 2 = 10$$

e nemmeno questi vettori sono tra loro ortogonali e quindi nessuna coppia delle rette r_1, r_2 ed r_3 è formata da rette ortogonali.

(3c): dal punto (3a) segue che r_1 ed r_2 e inoltre r_2 ed r_3 sono tra loro sghembe.