COGNOME | NOME
CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** | ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE
22 giugno 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se f è la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da: $f(n) = (n, n^2)$, allora la coppia $(3, 8)$ appartiene all'immagine di f. **V** | **F** **F**
2. Se $Arg(z)$ è l'argomento del numero complesso z, allora $Arg(z^2) = Arg(z)$. **V** | **F** **F**
3. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (n, -n)$ è iniettiva. **V** | **F** **V**
4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{C}$ da
$$(a + ib)R(c + id) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c$$
è una relazione d'equivalenza. **V** | **F** **V**
5. Se E è la relazione d'equivalenza sui numeri reali non nulli definita da
$$aEb \qquad \Leftrightarrow \qquad a - b \in \mathbb{Z}$$
e $[a]_E$ denota la classe d'equivalenza dell'elemento a, allora $[2]_E = [\sqrt{2}]_E$. **V** | **F** **F**
6. Dati A, B insiemi, il numero delle funzioni iniettive da A a B è uguale al numero delle funzioni iniettive da B ad A. **V** | **F** **F**
7. Se a, b sono numeri interi e $MCD(a, b) = MCD(2a, b)$ allora b è dispari. **V** | **F** **F**
8. L'insieme delle classi resto modulo n, senza la classe nulla, forma un gruppo rispetto al prodotto modulo n. **V** | **F** **F**
9. Esistono funzioni suriettive da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ che non sono iniettive. **V** | **F** **V**
10. Il numero di sottoinsiemi di 3 elementi che posso formare da un insieme di 10 elementi è $10 \times 9 \times 8$. **V** | **F** **F**

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale
$$2^n \leq 5^n - 3^n.$$

Soluzione La base è verificata perché $2^1 \leq 5^1 - 3^1$.
Per il passo induttivo, dobbiamo verificare che $2^{n+1} \leq 5^{n+1} - 3^{n+1}$. Si ha:
$$2^{n+1} = 2^n \times 2 \leq (5^n - 3^n) \times 2,$$
dove la disuguaglianza segue dall'ipotesi induttiva. Per verificare il passo induttivo ci basterà allora controllare che
$$(5^n - 3^n) \times 2 \leq 5^{n+1} - 3^{n+1}.$$
Poiché $5^{n+1} - 3^{n+1} = 5^n \times 5 - 3^n \times 3$, questa disuguaglianza è equivalente a $3^n \leq 5^n \times 3$, che è banalmente verificata.

2. Il test di sbarramento di questo compito è formato da 10 domande V/F.

(a) In quanti modi diversi si può rispondere alle domande, se non si lascia alcuna risposta in bianco? (ammettendo quindi un numero qualsiasi di errori)
Poiché ad ogni domanda possiamo rispondere in due modi, ci sono 2^{10} modi diversi.

(b) In quanti modi diversi si può rispondere alle domande ammettendo un qualsiasi numero di errori, ed esattamente due risposte lasciate in bianco?
Le risposte lasciate in bianco possono essere scelte in
$$\binom{10}{2}$$
modi diversi, per ognuno delle quali possiamo rispondere alle altre domande in 2^8 modi. Ne segue che il numero richiesto è
$$\binom{10}{2} \times 2^8.$$

(c) Se non si lascia nessuna risposta in bianco, quante sono le soluzioni possibili che contengono esattamente due errori?
Basta scegliere due risposte su 10, cioè quelle che avranno risposta errata. Questo si può fare in $\binom{10}{2}$ modi.

(d) Se non si lascia nessuna risposta in bianco, quante sono le soluzioni possibili che contengono al più due errori?

Basta contare quelle che contengono zero errori (1), quelle che contengono esattamente un errrore (10) e quelle che contengono esattamente due errori ($\binom{10}{2}$). Il numero richiesto è quindi
$$1 + 10 + \binom{10}{2}.$$

3. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione
$$z^4 = -3.$$

Scrivendo $z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$ avremo $z^4 = \rho^4(cos(4\theta) + isen(4\theta))$, mentre $-3 = 3(cos(\pi) + isen(\pi))$, Avremo quindi
$$\rho^4(cos(4\theta) + isen(4\theta)) = 3(cos(\pi) + isen(\pi)),$$

da cui segue $\rho =^4 \sqrt{3}$ e $4\theta = \pi + 2k\pi$, per $k = 0, 1, 2, 3$, da cui $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}$. Le quattro radici si trovano quindi in corrispondenza degli angoli

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{7\pi}{4}$$

e sono: $z_0 =^4 \sqrt{3}(cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4})$;
$z_0 =^4 \sqrt{3}(cos(\frac{3\pi}{4}) + isen(\frac{3\pi}{4})$;
$z_0 =^4 \sqrt{3}(cos(\frac{5\pi}{4}) + isen(\frac{5\pi}{4})$;
$z_0 =^4 \sqrt{3}(cos(\frac{7\pi}{4}) + isen(\frac{7\pi}{4})$.

4. Sia A l'insieme delle stringhe finite di caratteri alfabetici (ad esempio, le stringhe *csae* e *case* appartengono all'insieme A). Sia E la relazione binaria su A definita come segue: se $\sigma, \tau \in A$ allora

$$\sigma E \tau \Leftrightarrow \ \sigma \text{ e } \tau \text{ contengono le stesse lettere}$$

(nota: non si chiede che σ e τ contengano lo stesso numero di occorrenze di una data lettera, ad esempio vale $aEaa$)

(a) Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza.
E è riflessiva: se $\sigma \in A$ abbiamo $\sigma E \sigma$ poiché σ contiene le stesse lettere di σ.
E è simmetrica : se $\sigma, \tau \in A$ e $\sigma E \tau$ allora σ e τ contengono le stesse lettere e quindi anche $\tau E \sigma$.
E è transitiva : se $\sigma, \tau, \gamma \in A$ e $\sigma E \tau$, $\tau E \gamma$ allora σ contiene le stesse lettere di τ e τ contiene le stesse lettere di γ. Ne segue che anche σ e γ contengono le stesse lettere e quindi che $\sigma E \gamma$.

(b) Determinare la classe d'equivalenza della stringa composta dall'unica lettera a e indicare tre elementi distinti che appartengono alla classe della stringa ab.

$$[a]_E = \{a, aa, aaa, \ldots\}, \quad \{ab, aab, abb\} \subseteq [ab]_E.$$

(c) Per ognuno dei seguenti insiemi X, determinare se tale insieme è un insieme di rappresentanti delle classi d'equivalenza di E su A, giustificando adeguatamente le risposte (in particolare, in caso negativo spiegare quale condizione viene a mancare).

i. $X = \{\sigma \in A : \sigma \text{ è una lettera dell'alfabeto}\}$; non è un insieme di rappresentanti perché, ad esempio, in X non c'è nessun rappresentante per la classe di ab;

ii. $X = \{\sigma \in A : \sigma \text{ non contiene lettere ripetute}\}$; non è un insieme di rappresentanti perché, ad esempio, X contiene le stringhe ab e ba che appartengono alla stessa classe;

(d) Indicare un insieme, diverso da quelli dei punti precedenti, che sia un insieme di rappresentanti per le classi di E su A.
Se indichiamo con $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{26}$ le 26 lettere in ordine alfabetico (cioè: $a_1 = a, a_2 = b$ etc.) possiamo considerare l'insieme

$$X = \{a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} : 1 \leq k \leq 26, i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \cup \{\epsilon\},$$

dove ϵ è la stringa vuota. Tale insieme contiene uno ed un solo elemento per ogni classe d'equivalenza di E su A ed è quindi un insieme di rappresentanti.