COGNOME NOME

CORSO DI LAUREA | INF | TWM | ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SOLUZIONI SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE
21 giugno 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se f è la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da: $f(n, m) = (n, nm)$, allora la coppia $(3, 5)$ appartiene all'immagine di f. **V | F** **F**

2. Se $Arg(z)$ è l'argomento del numero complesso z, allora $Arg(2z) = Arg(z)$. **V | F** **V**

3. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, 0)$ è iniettiva. **V | F** **V**

4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{C}$ da
$$(a + ib)R(c + id) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = d$$
è una relazione d'equivalenza. **V | F** **F**

5. Se E è la relazione d'equivalenza sui numeri interi non nulli definita da
$$aEb \qquad \Leftrightarrow \qquad a \cdot b > 0,$$
e $[a]_E$ denota la classe d'equivalenza dell'elemento a, allora $[-2]_E = [1]_E$. **V | F** **F**

6. Esistono meno di 50 funzioni iniettive ad $A = \{0, 1, 2\}$ a $B = \{0, 1, 2, 4, 5\}$. **V | F** **F**

7. Se a, b sono numeri interi allora $MCD(a, b) = MCD(a + b, b)$. **V | F** **V**

8. L'insieme delle classi resto modulo n è un gruppo rispetto alla somma modulo n. **V | F** **V**

9. Esistono funzioni iniettive da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ che non sono invertibili. **V | F** **V**

10. Il numero di stringhe di lunghezza 20 composte dalle sole cifre 0 e 1 che hanno esattamente 5 cifre uguali a 1 è $\binom{20}{5}$. **V | F** **V**

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $5^{2n-1} + 1$ è divisibile per 6.

   Base: $5^{2-1} + 1 = 6$ è divisibile per 6.
   Passo induttivo: dobbiamo dimostrare che $5^{2(n+1)-1} + 1$ è divisibile per 6, sapendo per ipotesi induttiva che $5^{2n-1} + 1$ è divisibile per 6. Si ha:

$$5^{2(n+1)-1} + 1 = 5^{2n+1} + 1 = 5^{2n-1} \times 5^2 + 1 = 5^{2n-1} \times 25 + 1 = 5^{2n-1} \times 24 + 5^{2n-1} + 1.$$

   L'utimo membro delle uguaglianze è divisibile per 6 come somma di due numeri divisibili per 6.

2. Sia T una tabella quadrata con 8 righe e 8 colonne.

   (a) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$?

   Ci sono in tutto 64 caselle che possono essere riempite in 2^{64} modi diversi.

   (b) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$, in modo che ci siano esattamente 6 caselle con cifra uguale ad 1?

   Basta scegliere le 6 caselle con cifra 1 e questo può essere fatto in $\binom{64}{6}$ modi diversi.

   (c) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$, se ogni colonna deve contenere la stessa cifra (ma colonne diverse possono contenere cifre diverse)?
   2^8

   (d) Fissata una diagonale di T, in quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$ in modo che la tabella di cifre risultante sia simmetrica rispetto alla diagonale ?

   Poiché la tabella deve risultare simmetrica rispetto alla diagonale, dobbiamo scegliere solo il valore di 36 caselle (le altre vengono determinate per simmetria). Ci sono quindi 2^{36} diverse tabelle di questo tipo.

3. Determinare la forma trigonometrica di $(1 - i)^7$ e l'inverso moltiplicativo di $1 - i$.

   Si ha:

$$1 - i = \sqrt{2}(cos(\frac{3}{4}\pi) + isen(\frac{3}{4}\pi));$$

   ne segue che

$$(1 - i)^7 = (\sqrt{2})^7(cos(\frac{21}{4}\pi) + isen(\frac{21}{4}\pi)),$$

   mentre

$$(1 - i)^{-1} = (\sqrt{2})^{-1}(cos(-\frac{3}{4}\pi) + isen(-\frac{3}{4}\pi)).$$

4. Sia $\mathbb{C}^*$ l'insieme dei numeri complessi non nulli ed E la relazione binaria su $\mathbb{C}^*$ definita da

$$zEz' \Leftrightarrow z/z' \text{ è un numero reale}$$

   (a) Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza.
   E è riflessiva: infatti per ogni numero complesso non nullo z, il numero $z/z = 1$ è un numero reale;
   E è simmetrica: se $z/z' \in \mathbb{R}$ allora $z'/z = (z/z')^{-1}$ è un numero reale, perché è l'inverso di un numero reale.
   E è transitiva: se $z/z' \in \mathbb{R}$ e $z'/z'' \in \mathbb{R}$ allora $z/z'' = z/z' \times z'/z''$ è un numero reale, perché è prodotto di numeri reali.

(b) Determinare la classe d'equivalenza del numero 1 e quella del numero i. Si ha:

$$[1]_E = \{z \in \mathbb{C}^* : 1Ez\} = \{z \in \mathbb{C}^* : 1/z \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}^* : z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^*.$$

Inoltre, ricordando che $i^{-1} = -i$:

$$[i]_E = \{z \in \mathbb{C}^* : iEz\} = \{z \in \mathbb{C}^* : zEi\}\{z \in \mathbb{C}^* : z/i \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}^* : z \times i^{-1} \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C}^* : z \times (-i) \in \mathbb{R}\} = \{a + ib \in \mathbb{C}^* : (a + ib) \times (-i) \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a + ib \in \mathbb{C}^* : (-ia + b) \in \mathbb{R}^*\} = \{a + ib : a = 0, b \in \mathbb{R}^*\} = \{ib : b \in \mathbb{R}^*\}.$$

(c) Per ognuno dei seguenti insiemi X, determinare se tale insieme è un insieme di rappresentanti delle classi d'equivalenza di E su $\mathbb{C}^*$, giustificando adeguatamente le risposte.

i. $X = \{ri : r \in \mathbb{R}, r \neq 0\}$; questo insieme coincide con la classe d'equivalenza di i e quindi non è un insieme di rappresentanti (E ha infinite classi).

ii. $X = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$, dove $|z|$ è il modulo del numero complesso z. I numeri $1, -1$ appartengono entrambi ad X e vale $1E(-1)$, quindi X non è un insieme di rappresentanti.

(d) Descrivere un insieme, diverso da quelli elencati in precedenza, che sia un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su $\mathbb{C}^*$.

Un insieme di rappresentanti per le classi di E su $\mathbb{C}^*$ è dato ad esempio dall'insieme

$$X = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1, 0 \leq Arg(z) < \pi\}.$$

Questo insieme contiene uno ed un solo elemento per ogi classe d'equivalenza di E su $\mathbb{C}^*$. Infatti se $z/z' \in \mathbb{R}$ e $z, z' \in X$ allora $z/z' = 1$ e quindi $z = z'$. Inoltre ogni numero complesso z non nullo è nella stessa classe dei numeri $z/|z|, -z/|z|$ ed uno dei due sta in X.