NOME COGNOME

CORSO DI LAUREA **INF | TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE
7 settembre 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V | F** F

2. Se $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$, allora $Arg(z^{-1}) = -\frac{\pi}{2}$. **V | F** V

3. La funzione $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $g(z) = -z$ è l'inversa della funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z$. **V | F** F

4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{N}$ da
$$nRm \qquad \Leftrightarrow \qquad n + m = 1$$
è una relazione d'equivalenza. **V | F** F

5. La relazione d'equivalenza E definita sui numeri naturali da
$$aEb \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b \text{ oppure } a = -b$$
ha un numero finito di classi d'equivalenza. **V | F** F

6. Dati due insiemi A, B con n elementi, il numero delle funzioni da A a B è uguale a n^2. **V | F** F

7. Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, $MCD(a, b) = 1$, $c > 1$ e c divide a allora c non divide b. **V | F** V

8. L'insieme dei numeri interi forma un gruppo rispetto alla somma. **V | F** V

9. Esistono funzioni iniettive da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. **V | F** F

10. Se l'insieme A ha 10 elementi, l'insieme $\{(a, a') \in A \times A : a \neq a'\}|$ ne ha 90. **V | F** V

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale

$$(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$$

La base $n=2$ è verificata dall'uguaglianza

$$(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

Per il passo induttivo, dobbiamo verificare che

$$(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}.$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva, abbiamo:

$$(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n+1}),$$

e si verifica facilmente che

$$\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}.$$

2. La biblioteca dello studente Gianni comprende 6 testi di matematica, 7 di scienze e 4 di economia.

   (a) Se Gianni vuole vendere due libri della sua biblioteca, quante scelte ha?
   $\binom{17}{2}$

   (b) Quante se i due libri devono trattare lo stesso argomento?
   $\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{4}{2}$.

   (c) Quante se i due libri devono trattare argomenti diversi?
   $\binom{17}{2}-(\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{4}{2})$

3. Determinare l'inverso additivo e l'inverso moltiplicativo del numero 14 modulo 33 nell'insieme delle classi resto $\{0,1,\ldots,32\}$.

   L'inverso additivo è $33-14=19$, mentre per l'inverso moltiplicativo utilizziamo l'algoritmo di Euclide:

$$33=2\times 14+5, \quad 14=2\times 5+4, \quad 5=4+1,$$

   da cui si ricava: $1=5-4=5-(14-2\times 5)=3\times 5-14=3\times(33-2\times 14)-14=3\times 33-7\times 14$. Quindi l'inverso moltiplicativo è -7 modulo 33. cioè $33-7=26$.

4. Sia A l'insieme delle successioni finite non vuote delle cifre 0 e 1,

$$A=\{0,1,00,01,10,11,000,100,\ldots\}.$$

   Si consideri la seguente relazione binaria E sull'insieme A

$$\sigma E\tau \quad \Leftrightarrow \quad \sigma,\tau \text{ contengono lo stesso numero di cifre uguali ad 1}$$

   (ad esempio, $0R00$, $10R1$, $1001R110$, etc).

(a) Provare che E è una relazione di equivalenza.

E è riflessiva perché $\sigma E \sigma$ per ogni $\sigma \in A$ (il numero di cifre uguali ad 1 in σ è uguale al numero in $\sigma \ldots$)

E è simmetrica perché se $\sigma E \tau$ allora ovviamente vale anche $\tau E \sigma$ (il fatto che σ, τ abbiano lo stesso numero di cifre pari ad 1 non dipende dall'ordine);

E è transitiva perché se $\sigma E \tau$ e $\tau E \nu$ allora σ, τ hanno lo stesso numero di cifre pari ad 1, ma anche per τ, ν vale la stessa proprietà, quindi anche σ e ν hanno lo stesso numero di cifre pari ad 1: ne segue $\sigma E \nu$.

(b) Determinare la classe d'equivalenza della stringa 0 e della stringa 101.

$$[0]_E = \{0,\ 00,\ 000,\ 0000 \ldots\}$$

$$[101]_E = \{\sigma : \sigma \ \text{ ha due cifre uguali ad 1}\} = \{101,\ 11,\ 0011,\ 10100, \ldots\}$$

(c) La relazione E ha un numero finito o infinito di classi d'equivalenza? Ci sono infinite classi (vedi esercizio seguente).

(d) Trovare un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A. Un insieme di rappresentanti è, ad esempio:

$$\{0,\ 1,\ 11,\ 111,\ 1111, \ldots\}.$$