COGNOME NOME
CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

# SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA
# 22 giugno 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

## PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se $f$ è la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da: $f(n) = (n, n^2)$, allora la coppia $(3, 8)$ appartiene all'immagine di $f$. **V** | **F**

2. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (n, -n)$ è iniettiva. **V** | **F**

3. Se $E$ è la relazione d'equivalenza sui numeri reali non nulli definita da

$$aEb \qquad \Leftrightarrow \qquad a - b \in \mathbb{Z}$$

e $[a]_E$ denota la classe d'equivalenza dell'elemento $a$, allora $[2]_E = [\sqrt{2}]_E$. **V** | **F**

4. Dati $A, B$ insiemi, il numero delle funzioni iniettive da $A$ a $B$ è uguale al numero delle funzioni iniettive da $B$ ad $A$. **V** | **F**

5. Il numero di sottoinsiemi di 3 elementi che posso formare da un insieme di 10 elementi è $10 \times 9 \times 8$. **V** | **F**

6. Tutte le matrici quadrate a coefficienti reali sono diagonalizzabili sui reali. **V** | **F**

7. Il vettore $(0, 1)$ appartiene al nucleo della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **V** | **F**

8. L'immagine di un'applicazione lineare è uno spazio vettoriale. **V** | **F**

9. Se A,B,C sono matrici quadrate con C invertibile e $AC = CB$ allora $\det(A) = \det(B)$. **V** | **F**

10. I vettori $(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ sono linearmente indipendenti. **V** | **F**

**SECONDA PARTE**

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale
$$2^n \leq 5^n - 3^n.$$

2. Il test di sbarramento di questo compito è formato da 10 domande $V/F$.
   (a) In quanti modi diversi si può rispondere alle domande, se non si lascia alcuna risposta in bianco? (Ammettendo quindi un numero qualsiasi di errori)
   (b) In quanti modi diversi si può rispondere alle domande ammettendo un qualsiasi numero di errori, ed esattamente due risposte lasciate in bianco?
   (c) Se non si lascia nessuna risposta in bianco, quante sono le soluzioni possibili che contengono esattamente due errori?
   (d) Se non si lascia nessuna risposta in bianco, quante sono le soluzioni possibili che contengono al più due errori?

3. Si consideri l'omomorfismo $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato dal sistema
$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= -x - 2y \\ z' &= -2x - 4y, \end{cases}$$
dove $(x, y)$ è il generico vettore di $\mathbb{R}^2$ e $(x', y', z')$ rappresenta il vettore di $\mathbb{R}^3$ immagine di $(x, y)$ tramite l'applicazione $\psi$;
   (a) determinare i sottospazî $\ker \psi$ e $\operatorname{Im} \psi$, le loro dimensioni e una loro base;
   (b) determinare l'eventuale immagine inversa del vettore $v' := (-1, 1, 2)$; tale immagine inversa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?
   (c) trovare la matrice di $\psi$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ e determinare il suo rango.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino i seguenti vettori
$$v_1 := (1, 1, 1), \qquad v_2 := (1, 2, 3), \qquad v_3 := (1, 1, 2);$$
   (a) dimostrare che i vettori $v_1$, $v_2$ e $v_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$;
   (b) determinare le coordinate dei vettori $v := (5, 3, -1)$ e $w := (2, -1, 3)$ rispetto alla base $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$;
   (c) se $W := L(v, w)$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v$ e $w$, trovare un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ supplementare a $W$. Tale sottospazio supplementare è unico?