COGNOME NOME
CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA
21 giugno 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se f è la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da: $f(n, m) = (n, nm)$, allora la coppia $(3, 5)$ appartiene all'immagine di f. **V** | **F**
2. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, 0)$ è iniettiva. **V** | **F**
3. La relazione binaria R definita su $\mathbb{C}$ da
$$(a + ib)R(c + id) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = d$$
è una relazione d'equivalenza. **V** | **F**
4. Esistono meno di 50 funzioni iniettive ad $A = \{0, 1, 2\}$ a $B = \{0, 1, 2, 4, 5\}$. **V** | **F**
5. Se a, b sono numeri interi allora $MCD(a, b) = MCD(a + b, b)$. **V** | **F**
6. Il sistema $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ di due equazioni in una incognita x ha due soluzioni. **V** | **F**
7. La base $\{(1, 1), (1, 0)\}$ dello spazio $\mathbb{R}^2$ (dotato della metrica standard) è una base ortonormale. **V** | **F**
8. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale. **V** | **F**
9. Il nucleo di un'applicazione lineare è uno spazio vettoriale. **V** | **F**
10. Esistono matrici di cambio base a determinante nullo. **V** | **F**

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $5^{2n-1} + 1$ è divisibile per 6.

2. Sia T una tabella quadrata con 8 righe e 8 colonne.
   (a) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$?
   (b) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$ in modo che ci siano esattamente 6 caselle con cifra uguale ad 1?
   (c) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$ se ogni colonna deve contenere la stessa cifra (ma colonne diverse possono contenere cifre diverse)?
   (d) Fissata una diagonale di T, in quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre $0, 1$ in modo che la tabella di cifre risultante sia simmetrica rispetto alla diagonale?

3. Si consideri uno spazio vettoriale reale V di dimensione due e sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una sua base. Sia $f\colon V \to V$ l'endomorfismo lineare di V che – rispetto alla base $\mathcal{B}$ – è espresso tramite la seguente matrice 2×2:
$$A := \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$
   (a) determinare autovalori e autospazî di f e mostrare che f è diagonalizzabile;
   (b) scelta una base $\mathcal{B}'$ di autovettori di V, si trovi la matrice di cambio base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, e si determini inoltre l'inversa di questa matrice;
   (c) trovare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}'$, e mostrare esplicitamente che tale matrice è simile alla matrice A.

4. Si considerino i seguenti vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ (con la metrica standard):
$$v_1 := (-1, 0, -1, -1), \qquad v_2 := (-1, 0, 2, 0), \qquad v_3 := (-1, 1, 0, -2),$$
   e sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da questi vettori;
   (a) trovare una base ortonormale per V;
   (b) trovare una base del complemento ortogonale di V;
   (c) calcolare il valore dell'angolo tra v_1 e v_3.