COGNOME

NOME

CORSO DI LAUREA

INF TWM

ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA

19 luglio 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. La funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n, m) = (n, -m)$ è suriettiva. V F
2. La relazione d'equivalenza E definita sui numeri interi da
$$aEb \iff 100 \text{ divide } a - b$$
ha infinite classi d'equivalenza. V F
3. Se a, b, c sono numeri interi e $MCD(a, b) = MCD(b, c) = 1$ allora $MCD(a, c) = 1$ V F
4. L'insieme dei numeri complessi della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ forma un gruppo rispetto alla somma. V F
5. Il numero di strette di mano che si possono scambiare fra dieci persone è 10×9 . V F
6. Uno spazio vettoriale reale V di dimensione uno contiene infiniti vettori. V F
7. I vettori $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$ generano lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$. V F
8. Un autovalore di una matrice quadrata è uno scalare. V F
9. L'insieme vuoto ammette una struttura di spazio vettoriale reale ma non complesso. V F
10. Se A è una matrice quadrata tale che $\det(A) < 0$, allora le sue righe sono linearmente dipendenti. V F

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

2. Sia A l'insieme delle funzioni f con dominio e codominio uguale all'insieme dei numeri naturali. Si consideri la seguente relazione binaria E sull'insieme A

$$fEg \Leftrightarrow f(0) - f(1) = g(0) - g(1).$$

- (a) Provare che E è una relazione di equivalenza.
(b) Determinare la classe d'equivalenza della funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(n) = n + 1$. Descrivere almeno tre elementi diversi in questa classe.
(c) Stabilire se l'insieme

$$X = \{f : f \text{ è una funzione costante}\}$$

è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A . Se la risposta è negativa, indicare un altro insieme di rappresentanti di E su A , giustificando adeguatamente le risposte date.

3. Si considerino le seguenti matrici

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad B_\lambda := \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dove λ è un parametro reale.

- (a) Si moltiplichino le due matrici in modo tale da ottenere una matrice 3×3 – che denotiamo con C_λ – e si determini qual è il rango di C_λ in funzione del parametro λ ;
(b) si determinino i valori (reali) del parametro λ per cui C_λ è diagonalizzabile;
(c) posto $\lambda = 1$, si determinino gli autovalori e gli autospazi di C_1 , e si determini l'eventuale matrice diagonale simile a C_1 .
4. Si consideri il seguente sistema lineare a parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ di quattro equazioni nelle tre incognite x, y e z

$$\begin{cases} x - \lambda z = -1 \\ 2y - \lambda z = -1 \\ 2x - \lambda z = \lambda - 1 \\ \lambda x - 2y - 2\lambda z = -2\lambda - 2. \end{cases}$$

- (a) Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema ha soluzioni;
(b) se A_λ è la matrice completa del sistema e λ_0 è un valore del parametro per cui il sistema ha soluzioni, trovare l'inversa di un minore non nullo di rango massimo di A_{λ_0} (qui per *minore non nullo* di A_{λ_0} intendiamo una matrice quadrata a determinante non nullo ottenuta da A_{λ_0} eliminando da essa alcune righe e alcune colonne);
(c) trovare lo spazio vettoriale V_{λ_0} parallelo allo spazio affine delle soluzioni del sistema per ciascun λ_0 e lo spazio vettoriale supplementare a V_{λ_0} in $\mathbb{R}^3$.