COGNOME NOME
CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA
18 luglio 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(n) = \frac{1}{n+1}$ è iniettiva. **V** | **F**
2. Se $|z|$ è il modulo del numero complesso z, allora $|z^2| = 2|z|$. **V** | **F**
3. La relazione d'equivalenza E definita sui numeri razionali non nulli da
$$aEb \qquad \Leftrightarrow \qquad a \times b \geq 0$$
ha infinite classi d'equivalenza. **V** | **F**
4. Esistono funzioni biunivoche da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. **V** | **F**
5. Il numero di sottoinsiemi di che si possono formare a partire da da un insieme di 10 elementi è 10! **V** | **F**
6. Se $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ è uno spazio euclideo e $v, w \in V$ sono due vettori di lunghezza, rispettivamente, 3 e 4 tali che $\langle v, w \rangle = 0$, allora il vettore $v + w$ ha lunghezza maggiore di 7. **V** | **F**
7. L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **V** | **F**
8. Un autospazio di una matrice quadrata può ridursi al solo vettore nullo. **V** | **F**
9. Esistono matrici quadrate invertibili con determinante < 0. **V** | **F**
10. Se una matrice quadrata è diagonalizzabile, allora il suo determinante non può essere nullo. **V** | **F**

SECONDA PARTE

1. Ad un torneo di tennis partecipano 14 persone.
   (a) Quante partite di tennis con due sfidanti si possono organizzare?
   (b) Fra i concorrenti ci sono Andrea e Giacomo. Quante sfide possiamo organizzare se Andrea può giocare solo con Giacomo?
   (c) Quanti sono gli incontri di doppio (cioè due contro due)?
   (d) Se i partecipanti sono divisi in due squadre A, B da 10 e 4 persone rispettivamente, quante partite di tennis fra due sfidanti si possono organizzare in modo che i partecipanti all'incontro appartengano a squadre diverse ?

2. Sia $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, dove $\mathbb{N}^*$ è l'insieme dei numeri naturali non nulli. Si consideri la seguente relazione binaria E sull'insieme A

$$(x, y)E(s, t) \quad \Leftrightarrow \quad MCD(x, y) = MCD(s, t),$$

   dove $MCD(a, b)$ indica il massimo comun divisore dei numeri a, b.
   (a) Provare che E è una relazione di equivalenza.
   (b) Determinare la classe d'equivalenza della coppia $(1, 1)$.
   (c) Esistono classi di equivalenza che hanno solo un numero finito di elementi?
   (d) Determinare quale dei seguenti insiemi X è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A, giustificando adeguatamente le risposte:

$$X = \{(2, n) : n \in \mathbb{N}^*\}, \qquad X = \{(n, m) : n < m, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\} \qquad X = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ (con la metrica standard) si considerino i seguenti sottospazî vettoriali

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0\}, \\ V_2 &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \end{aligned}$$

   e sia $V_1 \cap V_2 =: V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale intersezione di questi
   (a) Determinare la dimensione di V e dello spazio vettoriale generato da V_1 e V_2;
   (b) trovare una base ortogonale di V;
   (c) trovare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 0, 0)$ su V.

4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato della metrica standard, si considerino le seguenti rette

$$r_1 := \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 2x_3 = 1, \end{cases} \qquad r_2 := \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1, \end{cases} \qquad r_3 := \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

   Si determinino quali di queste rette sono
   (a) incidenti, e in tal caso, determinare equazioni parametriche del piano che le contiene;
   (b) ortogonali;
   (c) sghembe.