

PROVA SCRITTA
MATEMATICA DISCRETA – SECONDA PARTE

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA &
CORSO DI LAUREA IN TECNOLOGIE WEB E MULTIMEDIALI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

—
ANNO ACCADEMICO 2009/10 E PRECEDENTI
22 GIUGNO 2011

Nome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Corso di Laurea:

Informatica:		Tecnologie Web e Multimediali:	
--------------	--	--------------------------------	--

Numero di matricola:

--	--	--	--	--	--

Anno di prima immatricolazione:

--	--	--	--

Avvertenze. Si prega di compilare **subito** la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di **tre ore** a decorrere dalla consegna di questo foglio. *Le risposte date vanno **sempre** giustificate.*

Esercizi

- (1) Si consideri l'omomorfismo $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= -x - 2y \\ z' &= -2x - 4y, \end{cases}$$

dove (x, y) è il generico vettore di $\mathbb{R}^2$ e (x', y', z') rappresenta il vettore di $\mathbb{R}^3$ immagine di (x, y) tramite l'applicazione ψ ;

- (a) determinare i sottospazi $\ker \psi$ e $\text{Im } \psi$, le loro dimensioni e una loro base;
 - (b) determinare l'eventuale immagine inversa del vettore $v' := (-1, 1, 2)$; tale immagine inversa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?
 - (c) trovare la matrice di ψ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ e determinare il suo rango.
- (2) Si consideri il seguente sistema lineare a parametro $k \in \mathbb{R}$ di tre equazioni nelle due incognite x e y

$$\begin{cases} (k-4)x + 3y = 1 \\ -x + ky = -1 \\ -x + y = k. \end{cases}$$

- (a) Determinare le eventuali soluzioni del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$;
- (b) se A_k è la matrice completa del sistema, trovare gli autovalori della matrice A_1 ;

- (c) dopo avere trovato gli autospazi di A_1 , dire se tale matrice è diagonalizzabile e trovare la matrice diagonale simile ad A_1 .
- (3) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino i seguenti vettori
- $$v_1 := (1, 1, 1), \quad v_2 := (1, 2, 3), \quad v_3 := (1, 1, 2);$$
- (a) dimostrare che i vettori v_1 , v_2 e v_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$;
- (b) determinare le coordinate dei vettori $v := (5, 3, -1)$ e $w := (2, -1, 3)$ rispetto alla base $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$;
- (c) se $W := L(v, w)$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori v e w , trovare un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ supplementare a W . Tale sottospazio supplementare è unico?