PROVA SCRITTA
MATEMATICA DISCRETA – SECONDA PARTE

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA &
CORSO DI LAUREA IN TECNOLOGIE WEB E MULTIMEDIALI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDÎ DI UDINE
—
ANNO ACCADEMICO 2010/11
21 GIUGNO 2011

Nome: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Cognome: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Corso di Laurea: Informatica: | | Tecnologie Web e Multimediali: | |

Numero di matricola: | | | | | | |

Anno di prima immatricolazione: | | | | |

Avvertenze. Si prega di compilare **subito** la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di **tre ore** a decorrere dalla consegna di questo foglio. *Le risposte date vanno* ***sempre*** *giustificate.*

Esercizî

(1) Si consideri uno spazio vettoriale reale V di dimensione due e sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una sua base. Sia $f\colon V \to V$ l'endomorfismo lineare di V che – rispetto alla base $\mathcal{B}$ – è espresso tramite la seguente matrice 2×2:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

(a) determinare autovalori e autospazî di f e mostrare che f è diagonalizzabile;
(b) scelta una base $\mathcal{B}'$ di autovettori di V, si trovi la matrice di cambio base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, e si determini inoltre l'inversa di questa matrice;
(c) trovare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}'$, e mostrare esplicitamente che tale matrice è simile alla matrice A.

(2) Si considerino i seguenti vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ (con la metrica standard):

$$v_1 := (-1, 0, -1, -1), \qquad v_2 := (-1, 0, 2, 0), \qquad v_3 := (-1, 1, 0, -2),$$

e sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da questi vettori;
(a) trovare una base ortonormale per V;
(b) trovare una base del complemento ortogonale di V;
(c) calcolare il valore dell'angolo tra v_1 e v_3.

(3) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato della metrica standard, si considerino i seguenti vettori

$$v_1 := (2, -5, -1), \qquad v_2 := (-1, 0, -2),$$

e sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato da questi vettori.

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del piano π parallelo a V e passante per il punto $P := (1, 0, 1)$;

(b) si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta ℓ ortogonale a π e passante per il punto $Q := (2, 1, 0)$;

(c) trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, tale che due vettori di detta base appartengano a V.