COGNOME

NOME

CORSO DI LAUREA

INF TWM

ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE

21 giugno 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se f è la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da: $f(n, m) = (n, nm)$, allora la coppia $(3, 5)$ appartiene all'immagine di f .

V F

2. Se $Arg(z)$ è l'argomento del numero complesso z , allora $Arg(2z) = Arg(z)$.

V F

3. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, 0)$ è iniettiva.

V F

4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{C}$ da

$$(a + ib)R(c + id) \quad \Leftrightarrow \quad a = d$$

è una relazione d'equivalenza.

V F

5. Se E è la relazione d'equivalenza sui numeri interi non nulli definita da

$$aEb \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b > 0,$$

e $[a]_E$ denota la classe d'equivalenza dell'elemento a , allora $[-2]_E = [1]_E$.

V F

6. Esistono meno di 50 funzioni iniettive ad $A = \{0, 1, 2\}$ a $B = \{0, 1, 2, 4, 5\}$.

V F

7. Se a, b sono numeri interi allora $MCD(a, b) = MCD(a + b, b)$.

V F

8. L'insieme delle classi resto modulo n è un gruppo rispetto alla somma modulo n .

V F

9. Esistono funzioni iniettive da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ che non sono invertibili.

V F

10. Il numero di stringhe di lunghezza 20 composte dalle sole cifre 0 e 1

che hanno esattamente 5 cifre uguali a 1 è $\binom{20}{5}$.

V F

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $5^{2n-1} + 1$ è divisibile per 6.
2. Sia T una tabella quadrata con 8 righe e 8 colonne.
 - (a) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1?
 - (b) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1, in modo che ci siano esattamente 6 caselle con cifra uguale ad 1?
 - (c) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1, se ogni colonna deve contenere la stessa cifra (ma colonne diverse possono contenere cifre diverse)?
 - (d) Fissata una diagonale di T , in quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1 in modo che la tabella di cifre risultante sia simmetrica rispetto alla diagonale?
3. Determinare la forma trigonometrica di $(1 - i)^7$ e l'inverso moltiplicativo di $1 - i$.
4. Sia $\mathbb{C}^*$ l'insieme dei numeri complessi non nulli ed E la relazione binaria su $\mathbb{C}^*$ definita da

$$zEz' \Leftrightarrow z/z' \text{ è un numero reale}$$

- (a) Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza.
- (b) Determinare la classe d'equivalenza del numero 1 e quella del numero i .
- (c) Per ognuno dei seguenti insiemi X , determinare se tale insieme è un insieme di rappresentanti delle classi d'equivalenza di E su $\mathbb{C}^*$, giustificando adeguatamente le risposte.
 - i. $X = \{ri : r \in \mathbb{R}, r \neq 0\}$;
 - ii. $X = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$, dove $|z|$ è il modulo del numero complesso z .
- (d) Descrivere un insieme, diverso da quelli elencati in precedenza, che sia un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su $\mathbb{C}^*$.