NOME COGNOME
CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE
20 settembre 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali, reali e complessi rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Una funzione invertibile è anche suriettiva. **V** | **F**
2. Ogni numero complesso non nullo ha un inverso moltiplicativo. **V** | **F**
3. Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è definita da $f(z) = 2z$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è definita da $g(z) = -z$ allora vale : $f \circ g = g \circ f$. **V** | **F**
4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{C}$ da
$$zRz' \qquad \Leftrightarrow \qquad z + z' \in \mathbb{R}$$
è una relazione d'equivalenza. **V** | **F**
5. La relazione d'equivalenza E definita sui numeri reali da
$$rEs \qquad \Leftrightarrow \qquad r^2 = s^2$$
ha infinite classi d'equivalenza. **V** | **F**
6. Dato un insieme A con n elementi, il numero dei sottoinsiemi di A di cardinalità due è uguale a $n(n-1)$. **V** | **F**
7. Se a, b, h, k sono numeri interi e $ah + kb = 1$ allora a è invertibile modulo b. **V** | **F**
8. L'insieme dei numeri interi dispari forma un gruppo rispetto alla somma. **V** | **F**
9. Non esistono funzioni suriettive da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. **V** | **F**
10. se $|A| = n, |B| = m$ allora $|Pow(A) \times Pow(B)| = 2^{nm}$. **V** | **F**

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

2. Anna e Maria sono testimoni di un furto e riescono a vedere per pochi istanti la targa della macchina del ladro. Interrogate dalla polizia, Anna e Maria concordano sul fatto che la targa fosse formata da due lettere dell'alfabeto seguite da quattro cifre numeriche.

   - Quante targhe di questo tipo esistono? (le targhe utilizzano un alfabeto con 27 lettere).
   - Maria è sicura che la seconda lettera fosse una O oppure una Q e che l'ultima cifra fosse un 8. Se Maria ha ragione, quante targhe deve controllare la polizia?
   - Anna è sicura che la prima lettera fosse una C oppure una G e che la prima cifra numerica fosse un 7. Se entrambe le ragazze hanno ragione, quante targhe deve controllare la polizia?

3. Determinare la forma trigonometrica del numero complesso $z = (1+i)^{17}$ e la forma trigonometrica di tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 1 + i.$$

4. Si consideri la seguente relazione d'equivalenza E sull'insieme $\mathbb{R}^2$

$$(x,y)E(z,w) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = z^2 + w^2.$$

   (a) Determinare la classe d'equivalenza di $(0,0)$ e di $(1,0)$.

   (b) Rappresentare sul piano cartesiano le due classi d'equivalenza dell'esercizio precedente.

   (c) Determinare quali dei seguenti insiemi sono insiemi di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su $\mathbb{R}^2$ giustificando adeguatamente le risposte.

      i. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$;

      ii. $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$;

      iii. $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$;

      iv. $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$;