COGNOME NOME

CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE
19 luglio 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $f(n) = \sqrt{n}$ è suriettiva. **V** | **F**
2. Esistono numeri complessi non nulli che non hanno inverso moltiplicativo. **V** | **F**
3. La funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n, m) = (n, -m)$ è suriettiva. **V** | **F**
4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{Q}$ da
$$qRq' \qquad \Leftrightarrow \qquad q - q' \geq 0$$
è una relazione d'equivalenza. **V** | **F**
5. La relazione d'equivalenza E definita sui numeri interi da
$$aEb \qquad \Leftrightarrow \qquad 100 \text{ divide } a - b$$
ha infinite classi d'equivalenza. **V** | **F**
6. Dato un insieme A con n elementi, il numero dei suoi sottoinsiemi è uguale ad n^2. **V** | **F**
7. Se a, b, c sono numeri interi e $MCD(a, b) = MCD(b, c) = 1$ allora MCD(a,c)=1 **V** | **F**
8. L'insieme dei numeri complessi della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ forma un gruppo rispetto alla somma. **V** | **F**
9. Esistono funzioni biunivoche da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$. **V** | **F**
10. Il numero di strette di mano che si possono scambiare fra dieci persone è 10×9. **V** | **F**

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

2. Sia A l'insieme delle funzioni f con dominio e codominio uguale all'insieme dei numeri naturali. Si consideri la seguente relazione binaria E sull'insieme A

$$fEg \quad \Leftrightarrow \quad f(0) - f(1) = g(0) - g(1).$$

   (a) Provare che E è una relazione di equivalenza.

   (b) Determinare la classe d'equivalenza della funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = n + 1$. Descrivere almeno tre elementi diversi in questa classe.

   (c) Stabilire se l'insieme

   $$X = \{f : \ f \text{ è una funzione costante}\}$$

   è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A. Se la risposta è negativa, indicare un altro insieme di rappresentanti di E su A, giustificando adeguatamente le risposte date.