COGNOME NOME

CORSO DI LAUREA | INF | TWM | ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE
18 luglio 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(n) = \frac{1}{n+1}$ è iniettiva. **V** | **F**
2. Se $|z|$ è il modulo del numero complesso z, allora $|z^2| = 2|z|$. **V** | **F**
3. La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da $f(z) = z^2$ è suriettiva. **V** | **F**
4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{C}$ da
$$(a + ib)R(c + id) \qquad \Leftrightarrow \qquad a + b = c + d$$
è una relazione d'equivalenza. **V** | **F**
5. La relazione d'equivalenza E definita sui numeri razionali non nulli da
$$aEb \qquad \Leftrightarrow \qquad a \times b \geq 0$$
ha infinite classi d'equivalenza. **V** | **F**
6. Dati due insiemi A, B con n elementi, il numero delle funzioni da A a B è uguale al numero delle funzioni da B ad A. **V** | **F**
7. Se a, b sono numeri interi e $MCD(a, b)$ è dispari. allora a, b sono entrambi dispari. **V** | **F**
8. L'insieme dei numeri naturali forma un gruppo rispetto alla somma. **V** | **F**
9. Esistono funzioni biunivoche da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. **V** | **F**
10. Il numero di sottoinsiemi di che si possono formare a partire da un insieme di 10 elementi è 10!. **V** | **F**

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

2. Ad un torneo di tennis partecipano 14 persone.

   (a) Quante partite di tennis con due sfidanti si possono organizzare?

   (b) Fra i concorrenti ci sono Andrea e Giacomo. Quante sfide possiamo organizzare se Andrea può giocare solo con Giacomo?

   (c) Quanti sono gli incontri di doppio (cioè due contro due)?

   (d) Se i partecipanti sono divisi in due squadre A, B da 10 e 4 persone rispettivamente, quante partite di tennis fra due sfidanti si possono organizzare in modo che i partecipanti all'incontro appartengano a squadre diverse ?

3. Trovare la forma trigonometrica del numero complesso

$$\frac{1+i}{1-i}$$

4. Sia $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, dove $\mathbb{N}^*$ è l'insieme dei numeri naturali non nulli. Si consideri la seguente relazione binaria E sull'insieme A

$$(x, y)E(s, t) \quad \Leftrightarrow \quad MCD(x, y) = MCD(s, t),$$

   dove $MCD(a, b)$ indica il massimo comun divisore dei numeri a, b.

   (a) Provare che E è una relazione di equivalenza.

   (b) Determinare la classe d'equivalenza della coppia $(1, 1)$.

   (c) Esistono classi di equivalenza che hanno solo un numero finito di elementi?

   (d) Determinare quale dei seguenti insiemi X è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A, giustificando adeguatamente le risposte:

$$X = \{(2, n) : n \in \mathbb{N}^*\}, \qquad X = \{(n, m) : n < m, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\} \qquad X = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}^*\}.$$