

NOME

COGNOME

CORSO DI LAUREA

INF **TWM**

ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE

7 settembre 2011

Il compito è composto da due sezioni. Per superarlo bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 8 domande della prima sezione ed ottenere la sufficienza nella seconda sezione. Le risposte sbagliate nella prima sezione influiscono negativamente sul voto complessivo. Compilate subito la parte anagrafica del compito. La durata della prova è di 3 ore.

PRIMA SEZIONE

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali e reali, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n + 1)$ è suriettiva.

V **F**

2. Se $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$, allora $\text{Arg}(z^{-1}) = -\frac{\pi}{2}$.

V **F**

3. La funzione $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $g(z) = -z$ è l'inversa della funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z$.

V **F**

4. La relazione binaria R definita su $\mathbb{N}$ da

$$nRm \quad \Leftrightarrow \quad n + m = 1$$

è una relazione d'equivalenza.

V **F**

5. La relazione d'equivalenza E definita sui numeri naturali da

$$aEb \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ oppure } a = -b$$

ha un numero finito di classi d'equivalenza.

V **F**

6. Dati due insiemi A, B con n elementi, il numero delle funzioni da A a B è uguale a n^2 .

V **F**

7. Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\text{MCD}(a, b) = 1$, $c > 1$ e c divide a allora c non divide b .

V **F**

8. L'insieme dei numeri interi forma un gruppo rispetto alla somma.

V **F**

9. Esistono funzioni iniettive da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$.

V **F**

10. Se l'insieme A ha 10 elementi, l'insieme $\{(a, a') \in A \times A : a \neq a'\}$ ne ha 90.

V **F**

SECONDA PARTE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

2. La biblioteca dello studente Gianni comprende 6 testi di matematica, 7 di scienze e 4 di economia.

- (a) Se Gianni vuole vendere due libri della sua biblioteca, quante scelte ha?
- (b) Quante se i due libri devono trattare lo stesso argomento?
- (c) Quante se i due libri devono trattare argomenti diversi?

3. Determinare l'inverso additivo e l'inverso moltiplicativo del numero 14 modulo 33 nell'insieme delle classi resto $\{0, 1, \dots, 32\}$.

4. Sia A l'insieme delle successioni finite non vuote delle cifre 0 e 1,

$$A = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 100, \dots\}.$$

Si consideri la seguente relazione binaria E sull'insieme A

$$\sigma E \tau \iff \sigma, \tau \text{ contengono lo stesso numero di cifre uguali ad 1}$$

(ad esempio, $0R00$, $10R1$, $1001R110$, etc).

- (a) Provare che E è una relazione di equivalenza.
- (b) Determinare la classe d'equivalenza della stringa 0 e della stringa 101.
- (c) La relazione E ha un numero finito o infinito di classi d'equivalenza?
- (d) Trovare un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A .