Laboratorio di Topologia Algebrica

Workshop di formazione per docenti di matematica

Federico Quagliaro

In questa scheda vengono riportati sia i rapidi cenni teorici che sono stati dati ai ragazzi dell'ISIS Bachmann di Tarvisio (UD) sia gli esercizi a loro assegnati durante il laboratorio: i titoli delle sezioni corrispondono a quelli delle suddivisioni del laboratorio.

1 Definizioni preliminari

1.1 Omeomorfismi

Dati due punti A e B nello spazio tridimensionale, sia r la retta che passa per A e B. Chiameremo segmento di estremi A e B l'insieme di tutti i punti di r che sono compresi tra A e B (estremi inclusi).

Esempio 1.1. *Poiché su ogni retta può essere stabilito un ordine e ogni punto può essere etichettato con un numero reale, possiamo pensare i segmenti come degli intervalli*[1] *sulla retta reale. Ad esempio*

a) L'intervallo chiuso $[0,1]$ rappresenta il segmento (di lunghezza 1) i cui estremi sono etichettati con 0 e 1.

b) L'intervallo aperto $(0,1)$ rappresenta il segmento i cui estremi sono etichettati con 0 e 1 privato di tali estremi.

Dati due punti A e B nello spazio tridimensionale, chiameremo *cammino* da A a B un qualsiasi percorso che congiunge A con B. Data una qualsiasi regione $\mathcal{R}$ dello spazio che contiene A e B, diremo che un cammino tra A e B che non esce mai da $\mathcal{R}$ è un cammino di $\mathcal{R}$.

Esempio 1.2. *Dati due punti A e B nel piano, due possibili cammini da A a B nel piano sono il segmento AB e un arco di circonferenza passante per A e B.*

Esempio 1.3. *Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza e siano A e B due punti di $\mathcal{C}$. Allora due possibili cammini tra A e B sono il diametro di estremi A e B oppure un arco di $\mathcal{C}$ che unisce A e B. Tuttavia, solo l'arco di circonferenza è un cammino in $\mathcal{C}$ (mentre il diametro è un cammino tra A e B visto nel piano).*

Dati due qualsiasi sottoinsiemi dello spazio tridimensionale X e Y, diremo che un'applicazione che manda cammini di X in cammini di Y è *continua.*[2].

[1] In questo foglio – e in quelli successivi useremo la seguente notazione per gli intervalli: con $[a,b]$ indicheremo l'intervallo chiuso di estremi a e b, mentre con (a,b) indicheremo l'intervallo aperto di estremi a e b.

[2] Chi avesse già studiato il concetto di funzione continua in classe può osservare che ogni funzione continua secondo la definizione presentata in classe è continua anche secondo questa definizione.

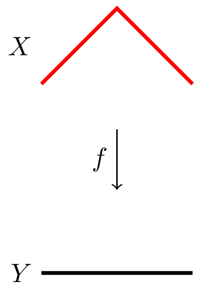


Figura 1: Esempio di applicazione continua.

Esempio 1.4. *Siano X e Y i sottoinsiemi del piano disegnati nella figura 1. L'applicazione f che proietta X su Y è un'applicazione continua: infatti, qualsiasi cammino in X viene mandato da f in un cammino di Y. Si noti che abbiamo definito f "graficamente", senza darne l'espressione analitica (f infatti sarebbe una funzione in due variabili – e questo concetto esula dalle finalità di questi esercizi).*

Esempio 1.5. *Le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tali che*

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \qquad e \qquad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

sono continue. Infatti, qualsiasi cammino nel dominio viene mandato in un cammino nell'insieme delle immagini (si provi a disegnare il grafico di f e g e a verificare questo fatto graficamente).

Esempio 1.6. *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x < 1 \\ -x & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

non è continua. Si consideri infatti il segmento $[0, 2]$. $[0, 2]$ è un cammino nel dominio, ma la sua immagine è l'insieme $[-2, -1] \cup [0, 1)$, che non è un cammino nell'insieme immagine.

Esempio 1.7. *Un'applicazione che deforma un segmento in un arco di circonferenza è un'applicazione continua.*

Chiameremo *omeomorfismo* tra X e Y una qualsiasi applicazione $f : X \to Y$ continua e biiettiva la cui inversa è continua. Se esiste un omeomorfismo tra X e Y diremo che X e Y sono *omeomorfi*.

Esempio 1.8. *La funzione $f : [1, 2] \to [3, 5]$ definita da $f(x) = 2(x - 1) + 3$ è un omeomorfismo tra il segmento $[1, 2]$ e il segmento $[3, 5]$.*

Esempio 1.9. *L'applicazione f definita nell'esempio 1.4 è un omeomorfismo tra X e Y: infatti, la sua inversa si ottiene invertendo il senso della freccia ed è continua perché manda cammini di Y in cammini di X.*

Lo studio degli omeomorfismi è molto importante in topologia perché – come vedremo nei seguenti esercizi – se due oggetti sono omeomorfi allora con gli occhi della topologia tali oggetti possono essere considerati come gli stessi perché hanno le medesime caratteristiche. Per questo motivo è molto importante capire quali oggetti sono omeomorfi tra loro e in particolare studiare le proprietà di un oggetto "difficile" studiando invece quelle di un oggetto "facile" ad esso omeomorfo.

1.2 Identificazioni e Nastro di Möbius

Sia $\mathcal{R}$ una relazione tra due insiemi X e Y e supponiamo che $Y = X$. $\mathcal{R}$ si dice *relazione di equivalenza su* X se soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\mathcal{R}$ è *riflessiva*, cioè $x\mathcal{R}x$ per ogni $x \in X$;

2) $\mathcal{R}$ è *simmetrica*, cioè se $x\mathcal{R}y$ allora $y\mathcal{R}x$ per ogni $x, y \in X$;

3) $\mathcal{R}$ è *transitiva*, cioè se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ allora $x\mathcal{R}z$ per ogni $x, y, z \in X$.

Esempio 1.10. *La relazione definita da $x\mathcal{R}y$ se e solo se $x = y$ è una relazione di equivalenza.*

Indicheremo spesso le relazioni di equivalenza con il simbolo $\sim$. Se $x \sim y$, diremo che x e y sono *equivalenti*.

Data una qualsiasi relazione di equivalenza su un insieme X è sempre possibile costruire un insieme in cui gli elementi equivalenti sono identificati, cioè sono considerati come se fossero lo stesso elemento: tale insieme si chiama *insieme quoziente di X rispetto a* $\sim$ e si indica con $X/\sim$[3].

Esempio 1.11. *Se $X = [0,1] \cup [2,3]$, allora la relazione definita da $x_1 \sim x_2$ se e solo se $x_1 = x_2$ oppure $\{x_1, x_2\} = \{1, 2\}$ è una relazione di equivalenza e l'insieme $X/\sim$ è un segmento di lunghezza* 2.

Chiameremo *quadrato unitario* l'insieme $\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\, 0 \leq x, y \leq 1\}$.

1.3 Gruppo fondamentale e nodi

In questa sezione e nella sezione 2.3, se non diversamente specificato, indicheremo con $\mathcal{R}$ un qualsiasi sottoinsieme dello spazio tridimensionale.

Siano A e B due punti nello spazio tridimensionale e sia γ un cammino tra A e B. Se $A = B$ allora γ di dice *laccio* di base A.

Esempio 1.12. *La circonferenza unitaria centrata nell'origine può essere pensata come un cammino che parte dal punto $P(1, 0)$ e ritorna su tale punto e quindi è un laccio di base P.*

Diremo che $\mathcal{R}$ è *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $A, B \in \mathcal{R}$ esiste almeno un cammino da A a B che giace interamente in $\mathcal{R}$.

Esempio 1.13.

- *Se $\mathcal{R}$ è un segmento o una figura piana (solo il bordo oppure piena) allora $\mathcal{R}$ è connesso per archi.*
- *Se $\mathcal{R}$ è la superficie di un solido allora $\mathcal{R}$ è connessa per archi.*
- *Se $\mathcal{R} = [0, 1] \cup [2, 3]$ allora $\mathcal{R}$ non è connessa per archi: infatti, ad esempio, qualsiasi cammino che congiunge 0 e 3 non giace interamente in $\mathcal{R}$.*
- *La regione colorata nella figura 2 non è connessa per archi perché non esiste nessun cammino che congiunge il centro della circonferenza interna con un punto della corona circolare esterna.*

[3] Sarebbe necessario dare una definizione più precisa di insieme quoziente, ma nel contesto di questi esercizi non è necessaria.

Figura 2: Esempio di regione non connessa per archi.

Siano A e B due punti di $\mathcal{R}$ e siano α e β due cammini in $\mathcal{R}$. Diremo che α e β sono *equivalenti* se è possibile deformare α in β con continuità senza uscire da $\mathcal{R}$ mantenendo fissi gli estremi.

Esempio 1.14. *Se $\mathcal{R}$ è il piano allora i due cammini giallo e rosso rappresentati in figura 3 sono equivalenti.*

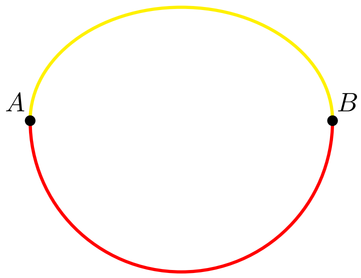


Figura 3: Cammini equivalenti nel piano.

Se $\mathcal{R}$ è il piano privato della regione nera nella figura 4 allora i due cammini giallo e rosso rappresentati in figura 4 non sono equivalenti.

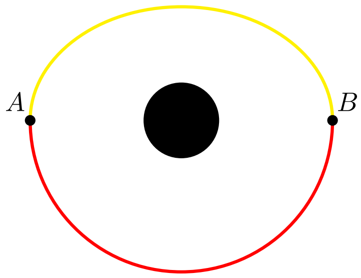


Figura 4: Cammini non equivalenti.

L'equivalenza tra cammini di $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza: in questa sezione e nella sezione 2.3 indicheremo tale relazione di equivalenza con $\sim$.

Ricordiamo che se P è un punto di $\mathcal{R}$ allora P può essere pensato come un cammino "che non si muove" e in cui il punto iniziale e quello finale coincidono. Chiameremo un qualsiasi cammino costituito da un solo punto P *laccio nullo di base* P.

Sia α un laccio in $\mathcal{R}$. Diremo che α è *contraibile ad un punto in* $\mathcal{R}$ se α è equivalente a un cammino nullo in $\mathcal{R}$, cioè se α è deformabile con continuità ad un punto di $\mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ è connessa per archi e ogni laccio di $\mathcal{R}$ è contraibile ad un punto in $\mathcal{R}$ allora diremo che $\mathcal{R}$ è *semplicemente connessa.*

Esempio 1.15. *Il segmento* $[0,1]$ *è semplicemente connesso.*

Chiameremo *nodo* un qualsiasi sottoinsieme dello spazio omeomorfo alla circonferenza.

Esempio 1.16. *A livello intuitivo un nodo è analogo al "nodo" dei lacci di una scarpa in cui gli estremi sono "incollati" fra loro.*

Diremo che due nodi sono *equivalenti* se – una volta costruiti tali nodi con lo spago – è possibile deformare fisicamente un nodo nell'altro senza tagliare lo spago.[4]

Chiameremo infine *link* o *nodo a più componenti connesse* un intreccio di più nodi.

In questo foglio ogni nodo verrà rappresentato graficamente dalla sua proiezione sul piano: in termini intuitivi, il disegno presente sul foglio è l'"ombra" che il nodo lascia sul foglio. Poiché – com'è ovvio – un nodo può proiettare infinite ombre su un foglio di carta (basta infatti deformarlo leggermente) chiameremo *posizione minima* la posizione in cui c'è il minor numero di incroci possibile.

2 Esercizi

2.1 Omeomorfismi

Nei seguenti esercizi sarà molto utile – e importante – pensare agli omeomorfismi come delle applicazioni che mandano punti in punti. Si suggerisce pertanto di disegnare gli insiemi coinvolti nei vari esercizi e di pensare a livello grafico come l'applicazione sposti punti in punti.

Esercizio 2.1. *Si mostri (dapprima graficamente ed eventualmente scrivendo anche la funzione in termini analitici) che*

a) due qualsiasi intervalli aperti (a,b) *e* (c,d) *con* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *sono omeomorfi.*

b) l'intervallo $(0,1)$ *è omeomorfo all'intervallo* $(1,+\infty)$*.*

c) l'intervallo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ *è omeomorfo a tutto* $\mathbb{R}$*.*

d) l'intervallo $(-1,1)$ *è omeomorfo all'arco della circonferenza goniometrica che giace nel primo e secondo quadrante del piano cartesiano.*

Cosa possiamo dedurre da quanto mostrato? Che tipo di trasformazioni della retta possono essere indotte da un omeomorfismo?

Esercizio 2.2. *Discutere le seguenti.*

a) Esiste un omeomorfismo tra l'intervallo $(0,2)$ *e l'insieme* $(0,1)\cup(1,2)$*?*

b) Esiste un omeomorfismo tra l'intervallo $(0,1)$ *e l'intervallo* $[0,1]$*?*

c) L'unione di due rette incidenti può essere omeomorfa a una retta?

d) Le coniche (non degeneri) sono tutte omeomorfe fra loro? Perché? In caso contrario, è possibile "modificare" leggermente le coniche per renderle tutte omeomorfe?

[4] Chiaramente questa definizione non è rigorosa: la definizione rigorosa fa uso dei concetti di omeomorfismo e di orientazione e non è necessaria ai fini di questo lavoro.

Elencare alcune proprietà comuni di cui godono due insiemi omeomorfi.
[Suggerimento: se X e Y sono omeomorfi tramite l'omeomorfismo f e $x \in X$, allora $X \setminus \{x\}$ sarà necessariamente omeomorfo a $Y \setminus f(x)$.]

Esercizio 2.3. *In questo esercizio con quadrato o triangolo intendiamo solo il bordo di una regione quadrata o triangolare. Si mostri graficamente*[5] *che*

a) due quadrati sono omeomorfi indipendentemente dalla misura del loro lato.

b) due circonferenze sono omeomorfe indipendentemente dalla misura del loro raggio.

c) il quadrato e la circonferenza sono omeomorfi.

d) il quadrato e il triangolo sono omeomorfi.

Cosa possiamo dedurre da quanto mostrato? Che trasformazioni nel piano possono essere indotte da un omeomorfismo?

[Suggerimento: per il punto c) basta mostrare che un particolare quadrato e una particolare circonferenza sono omeomorfi. Quali? Perchè è sufficiente mostrare solo questo caso particolare?]

Esercizio 2.4. *Si scrivano tutte le 26 lettere maiuscole dell'alfabeto inglese e si dividano tali lettere in gruppi di lettere omeomorfe.*

[Suggerimento: può essere utile usare l'esercizio 2.2.]

Esercizio 2.5. *Si mostri (solo graficamente se non altrimenti specificato) che*

a) La circonferenza privata di un punto è omeomorfa a tutto $\mathbb{R}$. Si scriva anche l'espressione analitica di tale omeomorfismo.

b) La superficie di una sfera privata di uno dei due poli è omeomorfa a tutto il piano.[6]

c) La superficie di una calotta sferica è omeomorfa a un disco (cioè alla superficie di piano delimitata da una circonferenza - bordo incluso) .

d) La superficie laterale di un cono (finito e a una falda) è omeomorfa alla superficie di una calotta sferica (con bordo).

e) La superficie laterale di un cilindro (con bordo) è omeomorfa a una corona circolare (con bordo).

Cosa possiamo dedurre da quanto mostrato? Che trasformazioni dello spazio possono essere indotte da un omeomorfismo?

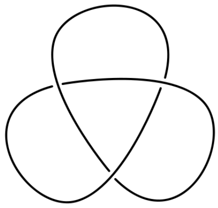
Esercizio 2.6. *Si dividano i seguenti oggetti in gruppi di oggetti omeomorfi.*

- *Ciambella (col buco), tazza da tè con manico, maglietta, pantaloni, bottiglia (senza tappo), orologio da polso, palla, bicchiere, moneta, ciuccio, montatura di occhiali (senza lenti).*

Esercizio 2.7. *La circonferenza è omeomorfa all'immagine in figura (che rappresenta un nodo fatto con uno spago)?*

[5] Esprimere gli omeomorfismi di questo esercizio in maniera analitica è difficile perché sono funzioni di due variabili.)

[6] Gli omeomorfismi mostrati al punto *a*) e al punto *b*) prendono il nome di *proiezioni stereografiche* (rispettivamente dalla circonferenza meno un punto alla retta e dalla sfera meno un polo al piano).



Cosa possiamo dedurre da quanto mostrato? In che senso questo "modifica" l'idea di omeomorfismo che abbiamo costruito con gli esercizi precedenti?

[Suggerimento: si provi a dividere il nodo in maniera opportuna e si cerchi di vedere se è possibile definire un'applicazione continua che manda ciascuna di esse in una parte di circonferenza.]

Esercizio 2.8. *Riassumendo, cosa possiamo concludere sulle trasformazioni che gli omeomorfismi possono indurre nel piano o nello spazio?*

2.2 Identificazioni e Nastro di Möbius

Esercizio 2.9. *Si descriva l'insieme quoziente $X/\sim$ in ciascuno dei seguenti casi.*

(a) $X = [0, 1]$ *e* $\sim$ *è definita da* $x_1 \sim x_2$ *se e solo se* $x_1 = x_2$ *oppure* $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$.

(b) X *è il rettangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalle rette* $x = 10$ *e* $y = 4$ *e* $\sim$ *è definita da* $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ *se e solo se* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ *oppure* $y_1 = y_2$ *e* $\{x_1, x_2\} = \{0, 10\}$.

(c) X *è il rettangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalle rette* $y = 1$ *e* $x = 10$ *e* $\sim$ *è definita da* $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ *se e solo se* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ *oppure* $\{x_1, x_2\} = \{0, 10\}$ *e* $y_1 = 1 - y_2$.

[Suggerimento: per svolgere questo esercizio, è molto utile disegnare l'insieme X e capire, a livello pratico, cosa significa identificare due punti. Nei casi (b) e (c) si consiglia di costruire (come?) l'insieme quoziente con carta e nastro adesivo.]

Gli insiemi quozienti descritti nei primi due punti del precedente esercizio dovrebbero essere ben noti. L'insieme quoziente descritto nel punto (c) si chiama *Nastro di Möbius*. Gli insiemi quozienti descritti in (b) e in (c) si possono ottenere analogamente anche se X è il quadrato unitario e non un rettangolo: perché?

Esercizio 2.10. *Si descriva l'insieme quoziente nei seguenti casi.*

(a) X *è il quadrato unitario e* $\sim$ *è definita da* $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ *se e solo se* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ *oppure* $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$ *e* $y_1 = y_2$ *oppure* $\{y_1, y_2\} = \{0, 1\}$ *e* $x_1 = x_2$.

(b) X *è la regione delimitata dalla circonferenza di raggio* 1 *centrata nell'origine e* $\sim$ *è definita da* $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ *se e solo se* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ *oppure* $x_1 = x_2$ *e entrambi i punti giacciono sulla circonferenza.*

(c) X *è la corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio* 1 *e di raggio* $\frac{1}{2}$ *centrate nell'origine e* $\sim$ *è definita da* $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ *se e solo se* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ *oppure* $x_1 = x_2$ *ed entrambi i punti giacciono sulla circonferenza di raggio* 1.

[Suggerimento: l'idea che sta alla base di questo esercizio è la medesima dell'esercizio 2.9: tuttavia, è necessaria maggiore immaginazione in quanto con un tradizionale foglio di carta – poco malleabile – risulta difficile costruire l'insieme $X/\sim$.]

L'insieme quoziente descritto nel punto (a) del precedente esercizio prende il nome di *toro*.

Esercizio 2.11. *Discutere le seguenti.*

a) È possibile costruire un cono come insieme quoziente di una regione del piano? In che modo?

b) È possibile costruire un cono come insieme quoziente di una superficie tridimensionale? In che modo?

c) È possibile costruire un nastro di Möbius come insieme quoziente di una superficie tridimensionale? In che modo?

Esercizio 2.12. *Si costruiscano con la carta un modello della superficie laterale del cilindro e uno del nastro di Möbius. Si discutano i seguenti problemi.*

a) Nel cilindro è possibile colorare la parte interna e quella esterna con due colori diversi. È possibile colorare il nastro di Möbius con due colori in maniera analoga?

b) Si tracci una linea continua ad uguale distanza dai due bordi sia sul cilindro che sul nastro. È possibile spostare in maniera continua questo cammino ad un cammino che giace su uno solo dei due bordi?

c) Una persona cammina lungo la linea disegnata al punto b) e percorre un solo giro. Cosa accade quando torna al punto di partenza?

Quali differenze si possono notare tra cilindro e nastro sulla base di questo esercizio?

Esercizio 2.13. *Si costruiscano con la carta un modello della superficie laterale del cilindro e uno del nastro di Möbius. Si descriva cosa accade:*

a) disegnando una linea continua ad uguale distanza dai due bordi sia sul cilindro che sul nastro e tagliando con le forbici.

b) disegnando una linea continua ad un terzo della distanza dai due bordi sia sul cilindro che sul nastro e tagliando con le forbici.

Esercizio 2.14. *C'era una volta un re che aveva cinque figli. Egli stabilì che alla sua morte il regno fosse suddiviso tra i figli in cinque regioni in modo che ciascuna regione confinasse con le altre quattro. È possibile esaudire la sua richiesta?*

2.3 Gruppo fondamentale e nodi

Esercizio 2.15. *Si dica se i seguenti sottoinsiemi dello spazio tridimensionale sono semplicemente connessi.*

a) Segmento, arco di circonferenza, linea poligonale aperta.

b) Circonferenza, disco pieno, bordo di un poligono, poligono pieno con bordo, piano senza l'origine degli assi.

c) Sfera (piena o cava), superficie laterale del cilindro (con bordi), superficie laterale del cono (con bordi), toro, nastro di Möbius.

Esercizio 2.16. *Si dica se i seguenti sottoinsiemi dello spazio tridimensionale sono omeomorfi.*

a) La circonferenza e il disco pieno (col bordo).

b) Il disco pieno privato del centro e la regione delimitata da un quadrato (entrambi con bordi).

b) La sfera (cava) e la superficie laterale del cilindro (con bordi).

c) La sfera (cava) e il toro.

[Suggerimento: se X è semplicemente connesso e X è omeomorfo a Y allora anche Y deve essere . . .]

Esercizio 2.17. *Un uomo si trova su un pianeta sconosciuto privo di punti di riferimento e vuole capire com'è fatta la superficie del pianeta senza poterlo guardare dall'alto (o dall'interno) in nessun modo. Egli sa che la superficie del pianeta potrebbe essere una delle seguenti:*

(a) la superficie di una sfera.

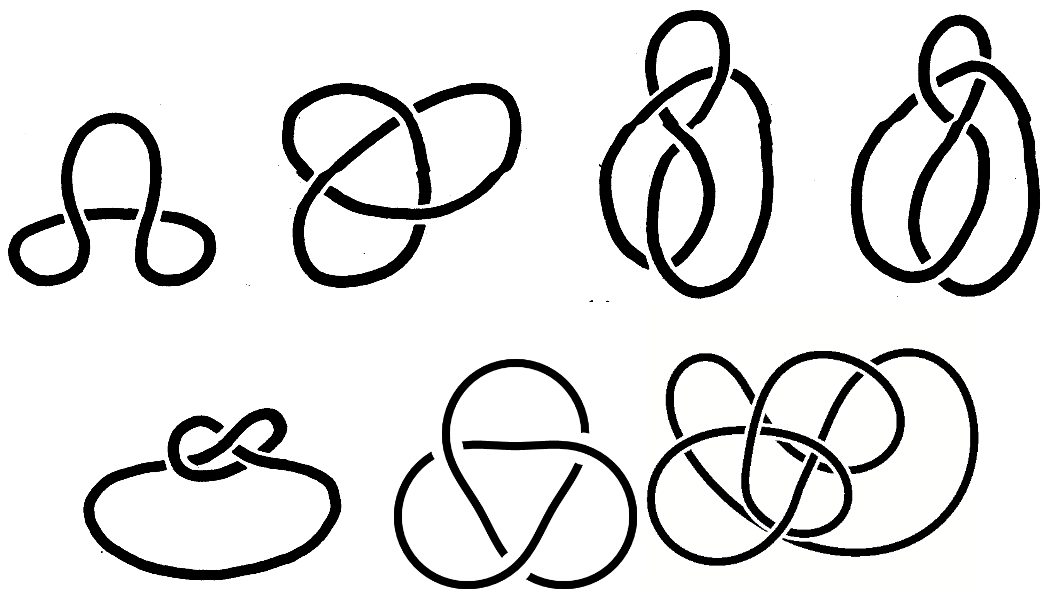
(b) la superficie laterale di un cilindro.

(c) la superficie di un toro.

Come può l'uomo stabilire com'è fatta la superficie del pianeta avendo a disposizione solo pezzi di corda lunghi a piacimento?

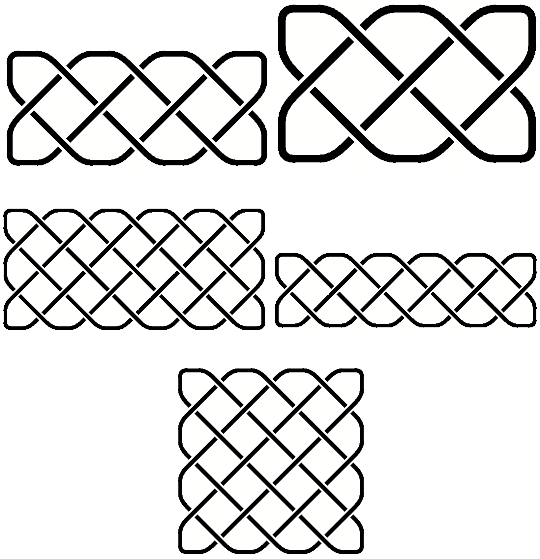
[Suggerimento: avere a disposizione pezzi di corda lunghi a piacimento equivale a poter tracciare tutte le linee chiuse che si desiderano sulla superficie del pianeta.]

Esercizio 2.18. *Si dividano i seguenti nodi in gruppi di nodi equivalenti. Si dica inoltre quali di essi sono nodi sciolti, cioè sono equivalenti a una circonferenza.*



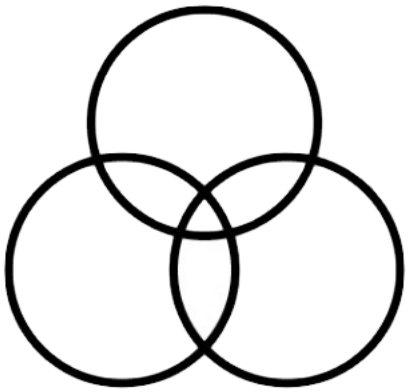
[Suggerimento: può essere utile costruire i nodi con uno spago.]

Esercizio 2.19. *Si stabilisca il numero di componenti dei seguenti links, che sono dei particolari esempi di nodi celtici.*



Esiste un modo per determinare il numero di incroci di ciascun nodo (senza contarli direttamente)?

Esercizio 2.20. *Si costruiscano con tre spaghi i cinque nodi a tre componenti connesse che (a meno di equivalenza) proiettano la seguente ombra.*



Si discutano le seguenti. Esiste una configurazione in cui gli anelli non possono essere separati tra loro ma tale che tagliando uno qualsiasi degli anelli

a) si separano anche gli altri due?

b) gli altri due non si separano?