Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo Programma

Prof. GIANLUCA GORNI

Testi di riferimento: WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). GIUSEPPE DE MARCO, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Misure prodotto

Rudin cap. 7. De Marco VII.6, VIII.4

Sigma-algebre prodotto. Prodotto cartesiano di spazi misurabili: rettangoli misurabili, σ-algebra prodotto, insiemi elementari, classi monotone, sezioni di un insieme. Tutte le sezioni di un insieme misurabile sono misurabili (rispetto alle relative σ-algebre). *La σ-algebra prodotto coincide con la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari.* Sezioni di funzioni misurabili rispetto alla σ-algebra prodotto.

Misure prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. *Teorema di esistenza della misura prodotto di due misure σ-finite.* Esempi in cui viene meno la tesi del teorema precedente. *Teorema di Fubini-Tonelli.* Esempi di funzioni di due variabili reali con integrali iterati diversi.

Prodotti di misure di Lebesgue. Le due σ-algebre $\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_1$ non coincidono. Prodotti di σ-algebre dei boreliani di $\mathbb{R}^n$ e di spazi di misura di Lebesgue. Versione del teorema di Fubini-Tonelli per funzioni misurabili rispetto al completamento della σ-algebra prodotto. Comportamento della misura di Lebesgue rispetto alle trasformazioni lineari. *Formula del cambio di variabili lineare negli integrali di Lebesgue.* Formula del cambio di variabile generale (senza dimostrazione).

Calcolo di integrali multipli. Integrale del prodotto tensoriale di funzioni. Esercizi sugli integrali multipli. La densità di una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale e il suo integrale. Calcolo della media e della matrice di varianza-covarianza di una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale. Calcolo degli integrali di Fresnel $\int_0^\infty \operatorname{sen} t^2\,dt$, $\int_0^\infty \cos t^2\,dt$ usando il teorema di Fubini-Tonelli e il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Esistenza del limite di $\int_\pi^a f(x)\operatorname{sen} x\,dx$ per $a \to +\infty$ e finitezza (o meno) di $\int_\pi^\infty |f(x)\operatorname{sen} x|\,dx$ quando f è positiva, decrescente e infinitesima. *Dimostrazione della formula che lega le funzioni Gamma e Beta: $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$.* Calcolo di integrali in coordinate polari nel piano: formula generale e traccia di dimostrazione ad hoc. Calcolo di $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ usando il teorema di Fubini-Tonelli e le coordinate polari.

2. Spazi L^p

Rudin, cap. 2 e 3

Disuguaglianze di convessità. Richiami sulle funzioni convesse di una variabile. Definizione di funzione convessa e sua espressione in termini di rapporti incrementali. Esistenza delle derivate sinistre e destre. Il grafico di una funzione convessa si trova al di sopra di ogni retta tangente. Condizioni di convessità in termini di derivate prime o seconde. Funzioni strettamente convesse. *Disuguaglianza di Jensen.* Conseguenza: disuguaglianza fra medie geometriche e aritmetiche pesate di numeri positivi. Disuguaglianza di Young. *Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.*

Spazi L^p. Gli spazi normati $L^p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di una funzione misurabile su uno spazio di misura. Definizione di $\|f\|_\infty$ e dello spazio normato $L^\infty(\mu)$. Riscrittura delle disuguaglianze di Hölder e di Minkowski in termini di norme L^p. Completezza degli spazi L^p. Casi particolari degli spazi L^p: gli spazi $\ell^p(A)$, ℓ^p. $\mathbb{R}^n$ identificato con $\ell^p(\{1,\dots,n\})$. La norma di $\ell^p(\{1,2\})$ su $\mathbb{R}^2$ e la forma delle palle unitarie.

Sottospazi densi notevoli. L'insieme delle funzioni semplici e nulle fuori da un insieme di misura finita è denso in L^p per ogni $p \in [1,+\infty[$. *Il teorema di Lusin.* Densità di $C_c(X)$ in $L^p(\mu)$ se $1 \le p < +\infty$.

Esercizi. Sottospazi densi e non densi, convergenza uniforme e convergenza in L^∞ di successioni di funzioni continue, densità delle funzioni a gradino; appartenenza ad L^p di alcune funzioni elementari. Funzioni di $L^p(\mathbb{R})$ che non hanno limite all'infinito. Una funzione f tale che $f \in L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $p = 2$. Una funzione di $L^p(\mathbb{R})$ che ha infiniti asintoti verticali in ogni intervallo. L'insieme dei p per i quali $f \in L^p$ è sempre un intervallo. La funzione $p \mapsto \ln\int|f|^p$ è convessa e continua. La funzione $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ è convessa. Se $\mu(X) = 1$ allora $p \mapsto \|f\|_p$ è crescente. Se $f \in L^p$ per almeno un $p < +\infty$ allora $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ per $p \to +\infty$. Se $\mu(X) < +\infty$ allora $1 \le p_1 < p_2$ implica $L^{p_1}(\mu) \supseteq L^{p_2}(\mu)$. Se $1 \le p_1 < p_2$ allora $\ell^{p_1}(\mathbb{N}) \subset \ell^{p_2}(\mathbb{N})$. Se $\varphi\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è convessa allora il massimo di $x \mapsto \varphi(x)/x$ su un intervallo chiuso è assunto agli estremi. Se $1 \le p_1 \le p \le p_2$ allora $\|f\|_p \le \max\{\|f\|_{p_1}, \|f\|_{p_2}\}$. La disuguaglianza di Hardy. Il teorema di Egoroff.

3. Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Rudin, cap. 4, De Marco, cap. II.18, cap. VI.3, VI.5–7

Spazi di Hilbert. Spazi vettoriali con prodotto scalare: assiomi e prime proprietà. Disuguaglianza di Schwarz e disuguaglianza triangolare. La norma indotta dal prodotto scalare e gli spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert. Identità del parallelogrammo e suo significato geometrico. La norma $\|\cdot\|_p$ su $\mathbb{R}^2$ deriva da un prodotto scalare soltanto per $p = 2$. Continuità del prodotto scalare e della norma. Insiemi convessi. Ortogonalità. *Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso.* Uno spazio di Hilbert è somma diretta di un sottospazio vettoriale chiuso col suo ortogonale. Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale chiuso. *Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.* In uno spazio normato il sottospazio generato aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso è ancora chiuso. In uno spazio normato i sottospazi di dimensione finita sono chiusi. *Come si trova la proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio di Hilbert su un sottospazio a dimensione finita: caso di base qualsiasi e caso di base ortonormale.*

Somme infinite di vettori e basi hilbertiane. Somme infinite di vettori in spazi normati: definizione di sommabilità e di condizione di Cauchy. Una somma sommabile ha risultato unico e l'insieme degli indici per i quali il vettore è non nullo è al più numerabile. Relazione fra sommabilità e condizione di Cauchy. Somme infinite di numeri reali ≥ 0: definizione alternativa in termini di estremo superiore di tutte le sotto-somme finite o di integrale rispetto alla misura del conteggio. Se $\sum \|x_\lambda\|$ è sommabile, allora anche $\sum x_\lambda$ è sommabile, ma in dimensione infinita non vale il viceversa. Condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di una somma infinita di vettori a due a due ortogonali in uno spazio di Hilbert. Sistemi ortonormali di vettori in uno spazio di Hilbert. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortonormale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ e disuguaglianza di Bessel. Teorema di Riesz-Fischer: l'applicazione che porta il vettore x nella famiglia dei coefficienti di Fourier $\hat{x}(\alpha) := (x \mid u_\alpha)$ è lineare, continua e suriettiva da H in $\ell^2(A)$. Definizione di sistema ortogonale massimale (base hilbertiana). *Caratterizzazioni dei sistemi ortonormali massimali*, con le identità di Bessel e di Parseval. Teorema astratto di esistenza di basi hilbertiane per ogni spazio di Hilbert. Ogni spazio di Hilbert è isometrico a uno spazio ℓ^2. Lo spazio $L^2(\mathbb{R})$ è separabile. Le basi hilbertiane di uno spazio di Hilbert separabile sono al più numerabili. Una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R})$: le ondine di Haar (cenno).

Serie di Fourier. Costruzione di una misura boreliana invariante per rotazioni e normalizzata sul cerchio unitario $\mathbb{U}$. La famiglia di funzioni $u_n(z) := z^n$ su $\mathbb{U}$, per $n \in \mathbb{Z}$, è ortonormale in $L^2(\mathbb{U})$. Convoluzione di due funzioni continue su $\mathbb{U}$. *Ogni funzione continua su $\mathbb{U}$ può essere approssimata uniformemente con una successione di polinomi trigonometrici.* Completezza del sistema trigonometrico in $L^2(\mathbb{U})$. Il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier. *Il lemma di Riemann-Lebesgue.* L'espressione delle somme parziali della serie di Fourier in termini del nucleo di Dirichlet. *Il teorema di convergenza puntale delle serie di Fourier in ipotesi tipo Lipschitz.* Esempi di calcolo di serie di Fourier: l'onda quadra, l'onda a dente di sega, e la funzione $t \mapsto t^2$ prolungata per periodicità fuori da $[-\pi, \pi]$, con serie notevoli che ne derivano. Calcolo dell'integrale di Dirichlet $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a (\operatorname{sen} x)/x \, dx = \pi/2$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti durante l'orale.

1. La σ-algebra prodotto coincide con la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari
2. Teorema di esistenza della misura prodotto di due misure σ-finite
3. Teorema di Fubini-Tonelli.
4. Formula del cambio di variabili lineare negli integrali di Lebesgue.
5. Dimostrazione della formula che esprime la funzione Beta in termini della funzione Gamma.
6. Disuguaglianza di Jensen.
7. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
8. Teorema di Lusin.
9. Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
10. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.
11. Proiezione di un vettore di uno spazio di Hilbert su un sottospazio a dimensione finita.
12. Teorema di caratterizzazione delle basi hilbertiane.
13. Approssimazione uniforme di funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici.
14. Lemma di Riemann-Lebesgue.
15. Teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier in ipotesi "tipo Lipschitz".