Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo Programma

Prof. GIANLUCA GORNI

Testi di riferimento: WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). GIUSEPPE DE MARCO, *Analisi Due*, Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Integrali impropri dipendenti da un parametro.

De Marco, cap. VI.2 e VI.8

Alcuni semplici esempi di integrali impropri dipendenti da parametro che non sono continui rispetto al parametro. Studio della continuità e derivabilità della funzione $F(x) := \int_0^{+\infty} (\ln(1+x^2t^2))/(1+t^2)\,dt$. Strategia generale per lo studio di integrali impropri dipendenti da un parametro. *Definizione della funzione Gamma di Eulero-Legendre e sue proprietà:* insieme di definizione, continuità, derivabilità, comportamento nell'origine e all'infinito, formula fondamentale $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valore nei punti del tipo n e $n + 1/2$ con $n \in \mathbb{N}$. Cenno all'estensione del dominio della funzione Gamma usando la formula fondamentale. Calcolo dell'integrale di Laplace $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cos(2xt)dt$ derivando rispetto a x, oppure sviluppando il coseno in serie di Taylor.

2. Misure prodotto

Rudin cap. 7. De Marco VII.6, VIII.4

Sigma-algebre prodotto. Prodotto cartesiano di spazi misurabili: rettangoli, rettangoli misurabili, insiemi elementari, σ-algebra prodotto, sezioni verticali e orizzontali di un insieme. Le sezioni di un insieme misurabile sono misurabili. Operazioni insiemistiche con rettangoli e insiemi elementari. *La σ-algebra prodotto è la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari.*

Misure prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. *Integrali delle misure delle sezioni di un insieme misurabile in un prodotto di spazi σ-finiti: il risultato non dipende dall'ordine.* Definizione di misura prodotto. Sezioni di funzioni misurabili. *Teorema di Fubini-Tonelli.* Cambio dell'ordine di integrazione negli integrali iterati. Esempi di integrali iterati in cui il risultato dipende dall'ordine di integrazione. Commenti generali sul cambiamento dell'ordine di integrazione negli integrali iterati.

Prodotti di misure di Lebesgue. Lo spazio di misura di Lebesgue bidimensionale non coincide con il prodotto di due spazi di misura di Lebesgue unidimensionali. La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}^{r+s}$ coincide con il prodotto delle σ-algebre dei boreliani di $\mathbb{R}^r$ e di $\mathbb{R}^s$, e lo spazio di misura di Lebesgue in dimensione $r+s$ coincide con il completamento del prodotto degli spazi di misura di Lebesgue r ed s dimensionali. Funzioni misurabili rispetto al completamento di uno spazio di misura. Insiemi misurabili rispetto al completamento di una misura prodotto. Teorema di Fubini-Tonelli nella versione per funzioni misurabili rispetto al completamento della misura prodotto.

Calcolo di integrali multipli. Se $f \in L^1(\mu)$ e $g \in L^1(\lambda)$ allora $h(x,y) := f(x)g(y)$ è in $L^1(\mu \otimes \lambda)$ e $\int_{X\times Y} h\, d(\mu\otimes\lambda) = (\int_X f\, d\mu)(\int_Y g\, d\lambda)$. Integrali multipli impropri: esempi. Calcolo dei limiti di $\int_0^a \cos t^2\, dt$ e $\int_0^a \operatorname{sen} t^2\, dt$ per $a \to +\infty$ usando Fubini-Tonelli. Definizione della funzione Beta: simmetria e formule alternative. *Dimostrazione della formula che esprime la funzione Beta in termini della funzione Gamma.* La densità di una variabile aleatoria gaussiana in più dimensioni (cenno). Cambio di variabile lineare negli integrali multipli. Calcolo dell'integrale di $x \mapsto \exp(-(Ax \mid x))$ su $\mathbb{R}^n$ quando A è una matrice reale simmetrica. La matrice di varianza/covarianza di una variabile aleatoria gaussiana in più dimensioni (cenno). Integrazione di funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ (cenno). Calcolo dell'integrale su $\mathbb{R}^n$ di $x \mapsto xx^T \exp(-(Ax \mid x))$ ($x \in \mathbb{R}^n$ è vettore colonna e x^T il suo trasposto), quando A è una matrice simmetrica e definita positiva.

3. Spazi L^p

Rudin, cap. 2 e 3

Disuguaglianze di convessità. Funzioni convesse di una variabile reale: definizione e prime proprietà. *Disuguaglianza di Jensen.* Disuguaglianze fra medie geometriche e aritmetiche (pesate). Esponenti coniugati e disuguaglianza di Young. *Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Quando le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski diventano uguaglianze.

Spazi L^p. Definizione di $\|f\|_p$ e di spazio $L^p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$. Definizione di estremo superiore essenziale e di $L^\infty(\mu)$. Riscrittura delle disuguaglianze di Hölder e di Minkowski in termini di norme in $L^p(\mu)$. Per ogni $p \in [1,+\infty]$ $L^p(\mu)$ è uno spazio vettoriale, $\|\cdot\|_p$ è una norma su esso, rispetto alla quale $L^p(\mu)$ è uno spazio normato completo. Esempi di funzioni di L^p in vari intervalli. Gli spazi $\ell^p(\mathbb{N})$, e la norma $\|\cdot\|_p$ su $\mathbb{R}^n$.

Sottospazi densi notevoli. Approssimazione di una funzione misurabile con funzioni continue: il *teorema di Lusin.* Approssimabilità quasi ovunque di funzioni misurabili con successioni di funzioni continue. Sottospazi densi notevoli di $L^p(\mu)$ per $1 \leq p < +\infty$: l'insieme delle funzioni semplici misurabili e nulle al di fuori di un insieme di misura finita (se lo spazio è qualsiasi), l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto (se lo spazio è come nel teorema di rappresentazione di Riesz), l'insieme delle funzioni a gradino (se lo spazio è $L^p(\mathbb{R}^n)$).

Esercizi. Studio della funzione $p \mapsto \int_X |f|^p \, d\mu$; funzioni che sono in $L^p(\mu)$ soltanto per p in un intervallo non aperto; la disuguaglianza di Hardy; il teorema di Egoroff; se $f_n, f \in L^p(\mu)$, $f_n \to f$ puntualmente e $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ allora $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$.

4. Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Rudin, cap. 4, De Marco, cap. II.18, cap. VI.3, VI.5–7

Spazi di Hilbert. Spazi vettoriali con prodotto scalare. Norma indotta da un prodotto scalare e disuguaglianza di Schwarz. Le funzioni $x \mapsto (x \mid y)$, $x \mapsto (y \mid x)$, $x \mapsto \|x\|$ sono continue. Identità del parallelogrammo. Spazi di Hilbert. Esempi: $\mathbb{C}^n$ col prodotto hermitiano standard, $L^2(\mu)$, $C([0,1])$ con il prodotto scalare di $L^2([0,1])$. Insiemi convessi. *Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Teorema della proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert. *Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.*

Somme infinite di vettori e basi hilbertiane. In uno spazio normato se si aggiunge un vettore a un sottospazio vettoriale chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso. I sottospazi di dimensione finita di uno spazio normato sono sempre chiusi. *Proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio di Hilbert su un sottospazio a dimensione finita:* caso di una base qualsiasi e caso di una base ortonormale. Somme infinite in spazi normati: definizione di sommabilità e di condizione di Cauchy. La condizione di Cauchy equivale alla sommabilità se lo spazio è completo. La sommabilità di $\sum \|x(\lambda)\|$ implica la sommabilità di $\sum x(\lambda)$, ma non viceversa. Sommabilità di funzioni a valori reali positivi e a valori scalari. Sommabilità di una famiglia di vettori ortogonali in uno spazio di Hilbert. Famiglie ortonormali $\{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ in uno spazio di Hilbert H, disuguaglianza di Bessel ed associate applicazioni $x \mapsto \hat{x}$ da H in $\ell^2(\Lambda)$. Teorema di Riesz-Fischer sull'applicazione $x \mapsto \hat{x}$. Famiglie ortonormali massimali, o basi hilbertiane. *Teorema di caratterizzazione delle basi hilbertiane*, identità di Bessel e di Parseval. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a una base hilbertiana. Uno spazio di Hilbert ha una base hilbertiana numerabile se e solo se è separabile. Teorema di esistenza di basi hilbertiane in spazi di Hilbert qualsiasi.

Serie di Fourier. Basi hilbertiane di $L^2(\mathbb{R})$: cenno alle ondine di Haar. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ del piano complesso: costruzione di una misura boreliana invariante per isometrie e normalizzata. Polinomi trigonometrici. Convoluzione di funzioni di $L^2(\mathbb{U})$. *Approssimazione uniforme di funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici.* La famiglia di funzioni $\{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$. Una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$ formata da funzioni a valori reali. Calcolo dei coefficienti di

Fourier dell'onda quadra e a dente di sega e dell'onda "a parabola". Serie numeriche notevoli ottenute applicando l'identità di Bessel o la convergenza puntuale. Generalità sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier di funzioni continue. *Lemma di Riemann-Lebesgue.* I coefficienti di Fourier di funzioni di $L^1(\mathbb{U})$ sono infinitesimi. Le somme parziali di una serie di Fourier in termini del nucleo di Dirichlet. Alcune proprietà del nucleo di Dirichlet. *Teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier in ipotesi "tipo Lipschitz".* Riassunto dei risultati di convergenza delle serie di Fourier. Serie notevoli ottenute dalla convergenza puntuale della serie di Fourier dell'onda quadra. Calcolo dell'integrale improprio di Dirichlet $\int_0^{+\infty} (\operatorname{sen} x)/x \, dx = \pi/2$ usando il lemma di Riemann-Lebesgue.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti durante l'orale.

1. Definizione della funzione Gamma di Eulero-Legendre e sue proprietà.
2. La σ-algebra prodotto è la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari.
3. Integrali delle misure delle sezioni di un insieme misurabile in un prodotto di spazi σ-finiti: il risultato non dipende dall'ordine.
4. Teorema di Fubini-Tonelli.
5. Dimostrazione della formula che esprime la funzione Beta in termini della funzione Gamma.
6. Disuguaglianza di Jensen.
7. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
8. Teorema di Lusin.
9. Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
10. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.
11. Proiezione di un vettore di uno spazio di Hilbert su un sottospazio a dimensione finita.
12. Teorema di caratterizzazione delle basi hilbertiane.
13. Approssimazione uniforme di funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici.
14. Lemma di Riemann-Lebesgue.
15. Teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier in ipotesi "tipo Lipschitz".