Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). Giuseppe De Marco, *Analisi Due*, Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

http://www.dimi.uniud.it/~gorni

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale all'appello stesso o in qualsiasi successivo.

1. Misure boreliane e misura di Lebesgue

Spazi di Hausdorff localmente compatti. Motivazione per l'approccio all'integrale di Lebesgue usando il teorema di rappresentazione di Riesz. Preliminari topologici. Spazi topologici di Hausdorff, compatti, localmente compatti. Proprietà varie dei compatti. Proprietà dell'intersezione vuota di una famiglia di compatti. Costruzione di un aperto a chiusura compatta contenente un compatto dato e contenuto in un altro compatto dato. Definizione di funzione semicontinua inferiormente o superiormente. Esempi. Supporto di una funzione e spazio delle funzioni continue a supporto compatto. Le funzioni continue a supporto compatto hanno immagine compatta. La notazione $K \prec f \prec V$. *Il lemma di Urysohn*. Partizione dell'unità.

Il teorema di rappresentazione di Riesz. *Teorema di rappresentazione di Riesz* ambientato in spazi di Hausdorff localmente compatti. Regolarità interna ed esterna di una misura boreliana su uno spazio topologico. Spazi topologici σ-compatti e spazi misurabili σ-finiti. Rafforzamento del teorema di Riesz nell'ipotesi di σ-compattezza dello spazio. *Le misure boreliane che siano finite sui compatti di uno spazio in cui ogni aperto è σ-compatto sono regolari*.

La misura di Lebesgue. Preliminari alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^k$: scatole k-dimensionali, punti binari, cubi binari e loro proprietà. Ogni aperto è unione di una famiglia numerabile di cubi binari a due a due disgiunti. La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$: costruzione di un funzionale lineare positivo opportuno su $C_c(\mathbb{R}^k)$ a cui applicare il teorema di rappresentazione di Riesz. *Ogni misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}^k$ che sia finita sui compatti e invariante per traslazioni è un multiplo della misura di Lebesgue*.

Comportamento della misura di Lebesgue per trasformazioni lineari. La formula del determinante. Interpretazione del determinante di una matrice come misura (a parte il segno) dell'immagine del cubo unitario. Ogni insieme misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ di misura > 0 ha sottinsiemi non misurabili. Cenno al paradosso di Banach-Tarski e all'esistenza di funzioni di insieme finitamente additive che estendono la misura di Lebesgue in dimensione 1 e 2.

Approssimabilità di funzioni misurabili con funzioni continue o semicontinue. Una funzione misurabile positiva si può scrivere come combinazione lineare infinita (serie) di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. *Teorema di Lusin*. Densità delle funzioni continue a supporto compatto in $L^p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$. *Approssimazione di funzioni di $L^1(\mu)$ con funzioni semicontinue*.

Relazioni fra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue. Definizione dell'integrale di Riemann all'interno della teoria di Lebesgue: funzioni a gradino in dimensione k, integrale superiore e inferiore secondo Riemann, integrabilità secondo Riemann. L'integrabilità secondo Riemann implica l'integrabilità secondo Lebesgue, con lo stesso integrale. Oscillazione di una funzione da uno spazio topologico a uno spazio metrico e suoi collegamenti con la continuità. *Teorema di Vitali-Carathéodory sulla caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann*.

Integrali dipendenti da un parametro. Riassunto sui teoremi di base sul passaggio al limite sotto il segno di integrale. Integrali dipendenti da un parametro reale: varie ipotesi sotto cui si ha continuità rispetto al parametro. Le serie a termini positivi interpretate come integrali su $\mathbb{N}$ rispetto alla misura del conteggio. Continuità della funzione $\zeta(x) := \sum_{n\ge 1} 1/n^x$ di Riemann per $x > 1$ usando i teoremi sugli integrali dipendenti da parametro. Derivabilità sotto il segno di integrale: alcune semplici ipotesi che la garantiscono. Studio della funzione $F(x) := \int_0^1 e^{-xt^2}\,dt$. Esercizi sugli integrali dipendenti da parametro. Integrali dipendenti da un parametro in cui anche gli estremi di integrazione dipendono dal parametro. *Una dimostrazione che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ (integrale della gaussiana)*, usando gli integrali dipendenti da parametro. Studio di un integrale improprio dipendente da un parametro. La funzione Gamma di Eulero-Legendre. Calcolo dell'integrale di Laplace $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\cos(2tx)\,dt = \sqrt{\pi}e^{-x^2}$ in due modi.

2. Misure prodotto

La σ-algebra prodotto. Problema: dati due spazi di misura X e Y, trovare una misura su $X \times Y$ che sugli insiemi della forma $A \times B$ con A, B misurabili (rettangoli misurabili) coincida con il prodotto delle misure di A e di B. La σ-algebra prodotto di due σ-algebre. Sezioni orizzontali e sezioni verticali di un sottinsieme di $X \times Y$ e loro misurabilità. Insiemi elementari. Classi monotone di insiemi. *La σ-algebra prodotto è la più piccola classe monotona contenente tutti gli insiemi elementari*. Sezioni di una funzione $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ e loro misurabilità.

Misura prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. *Misura prodotto di due misure σ-finite: teorema di esistenza*. *Teorema di Fubini-Tonelli*. Un facile esempio di una funzione misurabile sul quadrato $[0,1]^2$ con integrali iterati diversi. Esempi di situazioni in cui la tesi dei teoremi sulla misura prodotto o il teorema di Fubini non vale.

La σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ non coincide con il prodotto della σ-algebra dei misurabili su $\mathbb{R}$ con se stessa. *La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{r+s}$ il completamento della misura prodotto fra la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^r$ e quella in $\mathbb{R}^s$*. Funzioni misurabili rispetto al completamento di una misura. Completamento della misura prodotto di due misure σ-finite e complete: formula per la misura di un insieme misurabile e teorema di Fubini-Tonelli. Uso del teorema di Fubini per il calcolo degli integrali “impropri” di Fresnel $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \sqrt{\pi/8}$.

3. Spazi di Hilbert

Ortogonalità e proiezioni. Definizione di spazi vettoriali complessi con prodotto scalare. Prime conseguenze. Disuguaglianza di Schwarz. Norma indotta dal prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert. Sottospazi chiusi, ortogonalità, l'ortogonale di un sottinsieme, insiemi convessi. *Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert*. Teorema della proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale chiuso. *Rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert*.

Somme infinite in spazi normati. Somme infinite di vettori di uno spazio normato: definizione di sommabilità e di somma. In caso di sommabilità il vettore può essere non nullo solo su un insieme al più numerabile di indici. Condizione di Cauchy per la sommabilità. Se $||f||$ è sommabile allora lo è anche f. Il viceversa non è vero in dimensione infinita. Condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di un sistema ortogonale in uno spazio di Hilbert.

Sistemi ortonormali in uno spazio di Hilbert. Un sottospazio di dimensione finita di uno spazio normato è necessariamente chiuso. Formula per la proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio di Hilbert sul sottospazio generato da n vettori ortonormali. Rapporto fra sommabilità di funzioni scalari e integrabilità rispetto alla misura del conteggio. Un lemma sulle isometrie fra spazi metrici. Disuguaglianza di Bessel. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortonormale. L'applicazione che manda un vettore nei suoi coefficienti di Fourier. Sistemi ortogonali completi, o basi hilbertiane. *Condizioni equivalenti perché un sistema ortonormale sia una base hilbertiana*. Identità di polarizzazione, identità di Bessel e di Parseval. Principio di massimalità di Hausdorff. Ogni spazio di Hilbert ha una base hilbertiana.

Serie di Fourier. Cenno alle ondine di Haar come base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R})$. La misura normalizzata sul cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ invariante per rotazioni, introdotta col teorema di rappresentazione di Riesz. Corrispondenza fra funzioni su $\mathbb{U}$ e funzioni di variabile reale periodiche di periodo 2π. Lo spazio $L^2(\mathbb{U})$ e il sistema ortonormale $\{z \mapsto z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Un sistema equivalente formato da funzioni a valori reali. Convoluzione di due funzioni su $\mathbb{U}$. Polinomi trigonometrici su $\mathbb{U}$. *Approssimazione uniforme di funzioni continue su $\mathbb{U}$ con polinomi trigonometrici tramite convoluzione con opportuni polinomi trigonometrici e un esempio di una successione di polinomi trigonometrici con le proprietà richieste*. L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso in $L^2(\mathbb{U})$. Serie di Fourier di una funzione di $L^2(\mathbb{U})$, e sue somme parziali. Esempio di calcolo della serie di Fourier di una funzione.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Lemma di Urysohn.
2. Teorema di rappresentazione di Riesz (si possono consultare gli appunti).
3. Le misure boreliane che siano finite sui compatti di uno spazio in cui ogni aperto è σ-compatto sono regolari.
4. Ogni misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}^k$ che sia finita sui compatti e invariante per traslazioni è un multiplo della misura di Lebesgue
5. Comportamento della misura di Lebesgue per trasformazioni lineari.
6. Teorema di Lusin.
7. Approssimazione di funzioni di $L^1(\mu)$ con funzioni semicontinue.
8. Teorema di Vitali-Carathéodory sulla caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.
9. Una dimostrazione che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (integrale della gaussiana).
10. La σ-algebra prodotto è la più piccola classe monotona contenente tutti gli insiemi elementari.
11. Misura prodotto di due misure σ-finite: teorema di esistenza.
12. Teorema di Fubini-Tonelli.
13. La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{r+s}$ il completamento della misura prodotto fra la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^r$ e quella in $\mathbb{R}^s$.
14. Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
15. Rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.
16. Condizioni equivalenti perché un sistema ortonormale sia una base hilbertiana.
17. Approssimazione uniforme di funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici, tramite convoluzione con opportuni polinomi trigonometrici, e un esempio di una successione di polinomi trigonometrici con le proprietà richieste.