Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). Giuseppe De Marco, *Analisi Due/2*, Decibel-Zanichelli. Appunti del corso.

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine, con l'indicazione di quelli per i quali è consentito consultare gli appunti.

Regolamento d'esame: Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale all'appello stesso o in qualsiasi successivo.

1. Spazi L^p.

Rudin, cap. 2 e 3

Approssimabilità di funzioni misurabili. Approssimabilità delle funzioni misurabili con funzioni continue: *il teorema di Lusin*. Corollario al teorema di Lusin nel caso di funzioni limitate. Approssimabilità con funzioni semicontinue: il teorema di Vitali-Carathéodory.

Funzioni convesse di una variabile. Definizione di funzione convessa di una variabile reale. Caratterizzazione della convessità in termini di crescenza del rapporto incrementale rispetto a ciascuna delle due variabili. Le funzioni convesse sono localmente lipschitziane nell'interno dell'intervallo di definizione. Derivabilità a sinistra e a destra delle funzioni convesse e posizione del grafico rispetto alle rette tangenti. Caratterizzazione della convessità delle funzioni derivabili in termini di crescenza della derivata o di segno della derivata seconda.

Disuguaglianze di convessità. *La disuguaglianza di Jensen.* Significato geometrico della disuguaglianza di Jensen: una distribuzione di massa che sia concentrata sul grafico di una funzione convessa ha il baricentro al di sopra del grafico. Applicazioni della disuguaglianza di Jensen alla funzione esponenziale: disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica (semplici o pesate) di una lista di numeri positivi. La disuguaglianza di Young. Esponenti coniugati. *Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.*

Spazi L^p. La norma $\|f\|_p$ e lo spazio normato $L^p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di funzioni misurabili. Lo spazio normato $L^\infty(\mu)$ e la norma $\|f\|_\infty$. La disuguaglianza $\|fg\|_1 \le \|f\|_p\|g\|_q$ se p,q sono esponenti coniugati $1 \le p,q \le +\infty$. Gli spazi normati $L^p(\mu)$ sono completi per ogni $1 \le p \le +\infty$ e ogni successione convergente in $L^p(\mu)$ ha una sottosuccessione che converge μ-quasi ovunque. Il caso particolare in cui μ è la misura del conteggio su un insieme A: gli spazi $\ell^p(A)$ e il caso in cui A è finito. L'insieme delle funzioni semplici nulle al di fuori di un insieme di misura finita è denso in $L^p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$. Negli spazi dati dal teorema di Riesz l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto è denso in $L^p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$. Esempi che mostrano che $C_c(\mathbb{R})$ non è denso in $L^\infty(\mathbb{R})$. Per funzioni continue su $\mathbb{R}$ l'estremo superiore coincide con l'estremo superiore essenziale, rispetto alla misura di Lebesgue. L'insieme $C_0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue e infinitesime all'infinito è la chiusura in $L^\infty(\mathbb{R})$ del sottospazio $C_c(\mathbb{R})$.

Esercizi sugli spazi L^p. Studio della funzione $p \mapsto \int_X |f|^p d\mu$: l'insieme dei $p \in]0, +\infty[$ in cui è finita è un intervallo e ivi è logaritmicamente convessa. Le funzioni logaritmicamente convesse sono convesse. Formulazioni equivalenti della convessità logaritmica. La funzione Γ di Eulero-Legendre è logaritmicamente convessa. Continuità e derivabilità della funzione $p \mapsto \int_X |f|^p d\mu$. Costruzione di funzioni per le quali l'insieme dei p per i quali $\|f\|_p < +\infty$ è un intervallo non aperto. Se $0 < p_1 < p < p_2 < +\infty$ allora $L^{p_1}(\mu) \cap L^{p_2}(\mu) \subset L^p(\mu)$. Se $f \in L^{p_0}(\mu)$ per qualche $0 < p_0 < +\infty$ allora $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ per $p \to +\infty$. Se $\mu(X) = 1$ allora la funzione $p \to \|f\|_p$ è debolmente crescente, e condizione perché sia costante. Se $\mu(X) = 1$ e $f \in L^{p_0}(\mu$ per almeno un $p_0 > 0$ allora $\|f\|_p \to \exp \int_X \ln |f| \, d\mu$ per $p \to 0^+$. La disuguaglianza di Hardy. Teorema di Egoroff.

2. Spazi di Hilbert.

Rudin, cap. 4, De Marco, cap. II

Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso. Spazi vettoriali con prodotto scalare. Disuguaglianza di Schwarz (caso di spazi complessi). Disuguaglianza triangolare. Norma associata al prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Esempi. Identità del parallelogrammo. Le norme di L^1 e di L^∞ non soddisfano l'identità del parallelogrammo. Insiemi convessi. *Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* L'unicità può mancare in certi spazi normati.

Proiezioni ortogonali su sottospazi chiusi. Ortogonalità fra vettori di uno spazio con prodotto scalare. Sottospazio ortogonale a un vettore o a un insieme di vettori. Ogni spazio di Hilbert è la somma diretta di un qualsiasi suo sottospazio chiuso con il suo ortogonale. Proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso e sul suo ortogonale. *Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.*

Basi ortonormali. In uno spazio normato, il sottospazio generato aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso è ancora chiuso. I sottospazi a dimensione finita sono sempre chiusi. Calcolo della proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio di Hilbert su un sottospazio a dimensione finita (minimi quadrati). Insiemi di vettori ortonormali. Disuguaglianza di Bessel. Somme infinite in uno spazio normato: definizione di sommabilità e condizione di Cauchy. Equivalenza della sommabilità e della condizione di Cauchy per le somme infinite in uno spazio di Banach. Caso speciale delle somme infinite di numeri reali positivi, o di numeri reali o complessi: la sommabilità coincide con l'integrabilità rispetto alla misura del conteggio. Esempio di una serie in dimensione infinita che è sommabile sebbene la serie delle norme diverga. Dato un sistema ortonormale $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ in uno spazio di Hilbert H, i coefficienti di Fourier $\hat{x}(\alpha) := (x \mid u_\alpha)$ di un vettore $x \in H$ formano una famiglia sommabile in $\ell^2(A)$ e la trasformazione $x \mapsto \hat{x}$ è lineare e continua. *Teorema di Riesz-Fischer*: la trasformazione $x \mapsto \hat{x}$ è suriettiva da H a $\ell^2(A)$. Caratterizzazione dei sistemi ortonormali massimali (basi hilbertiane). Principio di massimalità di Hausdorff ed esistenza di basi hilbertiane di uno spazio di Hilbert qualsiasi.

3. Serie di Fourier.

Rudin, cap. 4, De Marco, cap. VI.

Lo spazio L^2 sul cerchio unitario di $\mathbb{C}$ e il sistema trigonometrico. Costruzione di una misura normalizzata sui boreliani del cerchio unitario $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ che sia invariante per rotazioni. Come visualizzare le funzioni $\mathbb{U} \to \mathbb{R}$. La famiglia delle funzioni $z \mapsto z^n$ per $n \in \mathbb{Z}$ è ortonormale in $L^2(\mathbb{U})$. Le funzioni $z \mapsto f(\alpha z)$ (per $\alpha \in \mathbb{U}$) e $z \mapsto f(\bar{z})$ hanno lo stesso integrale su $\mathbb{U}$. Convoluzione di due funzioni su $\mathbb{U}$. Il sistema ortonormale $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e le sue varianti. Polinomi trigonometrici. *Approssimazione uniforme di funzioni continue su $\mathbb{U}$ con polinomi trigonometrici*, tramite la convoluzione con una successione di polinomi trigonometrici aventi certe proprietà. Costruzione di tali polinomi trigonometrici. Il sistema ortonormale $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$. Corollari: se $f \in L^2(\mathbb{U})$ allora $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^n$ nel senso delle somme infinite in $L^2(\mathbb{U})$. Identità di Bessel e di Parseval.

Serie di Fourier. Il problema della convergenza delle somme parziali della serie di Fourier. Espressione delle somme parziali in termini del nucleo di Dirichlet. Il teorema di Fejér: le medie aritmetiche delle somme parziali della serie di Fourier di una funzione continua convergono uniformemente. Derivata di una funzione definita su $\mathbb{U}$ e formula di integrazione per parti. Relazione fra i coefficienti di Fourier di una funzione e quelli della derivata. La serie di Fourier della derivata è la derivata termine a termine della serie di Fourier della funzione. La serie di Fourier di una funzione di classe C^1 converge totalmente. *Il lemma di Riemann-Lebesgue.* I coefficienti di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{U})$ sono infinitesimi. *Il teorema di convergenza puntuale in ipotesi "tipo Lipschitz".* Calcolo esplicito della serie di Fourier di alcune funzioni: $t \mapsto t^2$. il segno di t (onda quadra) e $t \mapsto (\pi - t)/2$ (onda a dente di sega), estesi per periodicità da $[-\pi, \pi[$ a $\mathbb{R}$. Corollari: formule elementari per la somma di alcune serie numeriche notevoli.

4. Spazi di Banach.

Rudin, cap. 5.

Teorema di Baire e conseguenze. *Il teorema di Baire* sugli spazi metrici completi. Operatori lineari fra spazi normati, norma operatoriale e condizioni equivalenti di continuità. *Teorema di Banach-Steinhaus* o dell'uniforme limitatezza. Condizioni equivalenti perché una trasformazione lineare fra spazi normati sia aperta. Espressione del teorema di Baire in termini di insiemi "magri". *Teorema della mappa aperta.* Applicazione del teorema di Banach-Steinhaus: esistono funzioni continue $\mathbb{U} \to \mathbb{C}$ per le quali la successione delle ridotte della serie di Fourier non converge puntualmente. Applicazione del teorema della mappa aperta: esistono successioni $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ infinitesime che non sono la successione dei coefficienti di Fourier di alcuna funzione di $L^1(\mathbb{U})$.

Il teorema di Hahn-Banach. *Il teorema di Hahn-Banach reale.* Il caso complesso del teorema di Hahn-Banach. Il duale topologico di uno spazio normato e corollari del teorema di Hahn-Banach: caratterizzazione dei sottospazi chiusi, estensione a tutto lo spazio di funzionali continui definiti su sottospazi, esistenza di funzionali lineari continui con prescritta norma e valore in un punto, il duale separa i punti.

Applicazione dell'analisi funzionale alle funzioni armoniche. Funzioni armoniche: definizione, operatore di Laplace, significato in termini di matrice hessiana. *Il principio del massimo debole per le funzioni armoniche.* Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in dominî limitati: unicità della soluzione. Applicazione dei teoremi di Hahn-Banach e di Riesz al problema di Dirichlet: esistenza di una famiglia di misure boreliane sul bordo del dominio che riproducono le soluzioni dei problemi di Dirichlet. Funzioni armoniche nel piano: le parti reali e immaginarie di funzioni derivabili in senso complesso sono funzioni armoniche. Ricerca delle misure sul bordo nel caso del disco unitario.

5. Misure complesse.

Rudin, cap. 6.

Misure complesse e variazione totale. Definizione di misure complesse e con segno. Variazione totale di una misura complessa. La variazione totale di una misura complessa è una misura positiva. *La variazione totale di una misura complessa è una misura finita.* Lo spazio normato delle misure complesse su uno spazio misurabile. Variazione positiva e variazione negativa di una misura reale finita.

Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym. Definizione di assoluta continuità e di singolarità di una misura rispetto a un'altra e definizione di misura concentrata in un insieme. Proprietà elementari della relazione di assoluta continuità e di singolarità fra misure. *Il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym per misure positive finite.* Estensioni al caso di misure complesse o σ-finite. Contresempi nel caso non σ-finito.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti.

1. Teorema di Lusin.
2. Disuguaglianza di Jensen.
3. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
4. Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
5. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.
6. Teorema di Riesz-Fischer sui sistemi ortonormali in uno spazio di Hilbert.

*7. Approssimazione uniforme delle funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici.

8. Lemma di Riemann-Lebesgue.
9. Teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier in ipotesi "tipo Lipschitz".
10. Teorema di Baire.
11. Teorema di Banach-Steinhaus o dell'uniforme limitatezza.

*12. Teorema della mappa aperta.

13. Teorema di Hahn-Banach reale.
14. Principio del massimo debole per le funzioni armoniche.
15. La variazione totale di una misura complessa è una misura positiva finita.

*16. Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym.