



Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

## Programma Dettagliato

Prof. GIANLUCA GORNI

Testi di riferimento: WALTER RUDIN, *Analisi Reale e Complessa*, Boringhieri. GIUSEPPE DE MARCO, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Le dispense del corso e gli appunti delle lezioni sono disponibili su eLearning e presso <http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni>

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

### Spazi di Hilbert, operatori compatti, trasformata di Fourier

**Teoria elementare degli spazi di Hilbert.** Assiomi del prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso. Prime conseguenze. La norma indotta da un prodotto scalare. Formule notevoli per la norma quadra di una somma di vettori, ortogonali o meno. La disuguaglianza di Schwarz. La disuguaglianza triangolare. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert e di spazi con prodotto scalare. Continuità delle funzioni  $x \mapsto \langle x, y \rangle$ ,  $x \mapsto \|x\|$ ,  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ . L'identità di polarizzazione e l'identità del parallelogrammo. Non tutti gli spazi normati hanno un prodotto scalare che induce la norma. Gli spazi con prodotto scalare sono tutti e soli gli spazi normati in cui vale l'identità del parallelogrammo (cenno). Insiemi convessi in uno spazio vettoriale. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* In dimensione finita l'esistenza di punti di minima distanza non richiede la convessità. In uno spazio normato può venire a mancare l'unicità del punto di minima distanza di un punto da un convesso. Riscrittura in termini di prodotto scalare della condizione di minima distanza di un punto da un convesso. Riscrittura in termini di ortogonalità della condizione di minima distanza di un punto da un sottospazio vettoriale. Definizione di ortogonalità fra due vettori, di ortogonale a un vettore e di ortogonale a un insieme di vettori. Proprietà del passaggio all'ortogonale. Il teorema della decomposizione ortogonale negli spazi di Hilbert. L'operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale chiuso. *In uno spazio normato, se aggiungiamo un vettore a un sottospazio chiuso otteniamo un nuovo sottospazio pure lui chiuso.* I sottospazi di dimensione finita sono sempre chiusi. Calcolo esplicito della proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio di dimensione finita: caso di base qualsiasi e di base ortogonale.

**Somme infinite di vettori.** Somme infinite di vettori: definizione di sommabilità e di condizione di Cauchy. La sommabilità implica la condizione di Cauchy. La condizione di Cauchy implica che gli indici con vettore non nullo sono al più numerabili. In uno spazio completo la condizione di Cauchy implica la sommabilità. Somme infinite di numeri reali non negativi. Il criterio della convergenza assoluta implica la condizione

di Cauchy in qualsiasi spazio normato. La somma infinita di scalari vista come integrale rispetto alla misura del conteggio. La convergenza semplice della serie armonica a segni alterni, che non converge assolutamente. Cenno alla non commutatività della somma di serie che convergono solo semplicemente. La sommabilità è infinitamente commutativa, cioè la somma non cambia permutando gli indici. Gli spazi  $\ell^p$  come casi particolari degli spazi  $L^p$ . Comportamento della norma  $\|\cdot\|_p$  per vettori nel piano. Due esempi di famiglie sommabili che non hanno la proprietà della convergenza assoluta.

**Sistemi ortonormali in spazi di Hilbert.** Condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di una famiglia ortogonale di vettori in uno spazio di Hilbert e il teorema di Pitagora per infiniti vettori ortogonali. I coefficienti di Fourier  $\hat{x}(\lambda) := \langle x, u_\lambda \rangle$  di un vettore  $x \in H$  formano un vettore in  $\ell^2(\Lambda)$ . L'applicazione  $x \mapsto \hat{x}$  è lineare, continua e suriettiva da  $H$  su  $\ell^2(\Lambda)$ . Un lemma sulla minima distanza di un vettore da un convesso in uno spazio con prodotto scalare. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert.* Definizione di base hilbertiana di uno spazio di Hilbert. *Varie caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Distinzione fra basi vettoriali e basi hilbertiane. Osservazioni sulle basi vettoriali di uno spazio vettoriale, soprattutto quando lo spazio è anche normato e completo. Esistenza di basi hilbertiane numerabili per spazi separabili. Teorema di esistenza di basi hilbertiane in generale, usando l'assioma di scelta. Cenni alle ondate di Haar.

**Insiemi compatti o precompatti in spazi normati.** Generalità sui compatti e precompatti negli spazi topologici e metrici. Il problema degli insiemi compatti in spazi normati a dimensione infinita. Una base hilbertiana numerabile di uno spazio di Hilbert è un insieme limitato e chiuso ma non compatto. In uno spazio normato a dimensione infinita esiste una successione di versori  $x_n$  tali che ognuno dista da tutti gli altri almeno  $1/2$ , e quindi non può avere sottosuccessioni convergenti. I compatti in dimensione infinita hanno sempre parte interna vuota. I sottospazi a dimensione finita di uno spazio normato sono chiusi, completi ed omeomorfi a uno spazio  $\mathbb{C}^n$  o  $\mathbb{R}^n$ . *Teorema delle infinite estrazioni col metodo diagonale:* se abbiamo una matrice reale a due indici  $A_n(k)$ , con  $n, k \in \mathbb{N}$ , tale che l'insieme  $\{A_n(k) : n \in \mathbb{N}\}$  sia limitato per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , allora esiste una  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strettamente crescente tale che la successione  $n \mapsto x_{\varphi(n)}(k)$  converge per ogni  $k$  fissato. *Il teorema di Ascoli-Arzelà.* Il cubo di Hilbert.

**Operatori compatti fra spazi normati.** Definizione di operatore compatto fra spazi normati. Somma di operatori compatti è compatta. Composizione di operatori lineari continui, di cui almeno uno è compatto, è compatta. Lo spazio normato degli operatori lineari continui fra due spazi normati. *L'insieme degli operatori compatti è uno spazio vettoriale chiuso dello spazio degli operatori lineari continui.* Operatori con rango finito. Ogni operatore compatto a valori in uno spazio di Hilbert si può approssimare in norma operatoriale con una successione di operatori di rango finito. L'operatore integrale è compatto sullo spazio delle funzioni continue. L'operatore che manda  $(x_1, x_2, x_2, \dots)$  in  $(x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$  è compatto da  $\ell^p$  in sé, se  $1 < p < +\infty$ . Richiami sul duale di uno spazio normato. Definizione di aggiunto di un operatore lineare fra spazi normati. La norma operatoriale dell'aggiunto è uguale alla norma operatoriale dell'operatore di partenza. *Se un operatore lineare è compatto, anche il suo aggiunto è compatto.* Richiami sull'iniezione canonica nel biduale e sul biaggiunto di un operatore. *Se un operatore ha l'aggiunto compatto, allora è lui stesso compatto.*

Un lemma sulla continuità dell'inversa di un operatore lineare continuo e iniettivo fra spazi normati. *Un operatore compatto può avere immagine completa solo se ha rango finito.*

**Operatori compatti fra spazi di Hilbert e teoria spettrale.** Il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Identificazione fra uno spazio di Hilbert e il suo duale, e relazioni con l'immersione canonica nel bidual. L'aggiunto hilbertiano di un operatore lineare continuo fra due spazi di Hilbert. Relazione fra l'aggiunto hilbertiano e quello non hilbertiano. Richiami sulla convergenza debole negli spazi normati e in quelli di Hilbert. Ogni successione limitata in uno spazio di Hilbert ha una sottosuccessione che converge debolmente (senza dimostrazione). Un operatore continuo fra spazi di Hilbert è compatto se e solo se trasforma successioni convergenti debolmente in successioni convergenti fortemente. Definizione di autovalore, autovettore, autospazio e di spettro di un operatore da uno spazio vettoriale in sé. Gli autospazi con autovalore non nullo degli operatori compatti hanno dimensione finita. Esempio di un operatore compatto senza autovalori. Operatori autoaggiunti: il nucleo e la chiusura dell'immagine sono l'ortogonale uno dell'altro, gli autovalori sono reali, gli autovettori con autovalori distinti sono ortogonali. *Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto. Teorema di diagonalizzazione degli operatori compatti autoaggiunti.* Caratterizzazione degli operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert in termini di decomposizione spettrale. *Il teorema dell'alternativa di Fredholm (versione con autovalore 1).* Versione del teorema dell'alternativa di Fredholm per il problema  $\mu x - Ax = y$ .

**Operatori nucleo integrale e il problema di Sturm-Liouville.** L'operatore nucleo integrale  $Af(x) := \int_a^b K(x,y)f(y)dy$ . Se  $K$  è in  $L^2([a,b] \times [a,b])$  la  $A_K$  è lineare compatta da  $L^2([a,b])$  in sé. Se  $K$  è continua su  $[a,b] \times [a,b]$  allora  $A_K$  è lineare compatta da  $C([a,b])$  in sé. L'operatore differenziale di Sturm-Liouville  $Lu = -(\psi u')' + \varphi u$ . Il wronskiano di due soluzioni dell'equazione omogenea  $Lu = 0$ . Il metodo della variazione delle costanti per risolvere l'equazione non omogenea  $Lu = f$ . L'operatore nucleo integrale  $A_K$  che dà una soluzione di  $Lu = f$ . Le autofunzioni di  $A_K$  sono di classe  $C^2$  e sono autofunzioni anche di  $L$ .

**La trasformata di Fourier.** Convenzione sulla misura di Lebesgue sulla retta reale divisa per  $\sqrt{2\pi}$ . Richiami sul prodotto di convoluzione di funzioni di  $L^1(\mathbb{R})$ . La definizione di trasformata di Fourier di una funzione di  $L^1(\mathbb{R})$ . Prime proprietà: comportamento della trasformata di Fourier per traslazione, torsione, omotetia, ribaltamento, convoluzione, derivata. Proprietà delle traslate di una funzione di  $L^p(\mathbb{R})$ . La trasformata di Fourier di una funzione di  $L^1(\mathbb{R})$  è continua e infinitesima all'infinito. Alcune famiglie di funzioni ausiliarie  $H_\lambda, h_\lambda$  di cui si possono calcolare le trasformate esplicitamente. *Proprietà delle mollificate tramite  $h_\lambda$ . Il teorema di inversione nelle ipotesi  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$ .*

### Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
2. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso si ottiene un sottospazio chiuso.

3. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.
4. Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.
5. Il metodo diagonale per infinite estrazioni di sottosuccessioni.
6. Il teorema di Ascoli-Arzelà.
7. L'insieme degli operatori compatti  $X \rightarrow Y$  è un sottospazio chiuso di  $\mathcal{L}(X, Y)$  con la norma operatoriale.
8. Un operatore lineare è compatto se e solo se il suo aggiunto è compatto.
9. Un operatore compatto può avere immagine completa solo se l'immagine ha dimensione finita.
10. Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto.
11. Il teorema di diagonalizzazione gli operatori autoaggiunti compatti.
12. Il teorema dell'alternativa di Fredholm sulla risolubilità dell'equazione  $x - Ax = y$  quando  $A$  è un operatore compatto su uno spazio di Hilbert.
13. Il teorema di inversione della trasformata di Fourier nelle ipotesi  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , comprese le premesse sulle convoluzioni  $f * h_\lambda$ .
14. Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$ .