Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Le dispense del corso e gli appunti delle lezioni sono disponibili presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Spazi di Hilbert, operatori compatti, trasformata di Fourier

Teoria elementare degli spazi di Hilbert. Assiomi del prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso. Prime conseguenze. La disuguaglianza di Schwarz. La norma indotta da un prodotto scalare. La disuguaglianza triangolare. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert e di spazi con prodotto scalare. Continuità delle funzioni $x \mapsto \langle x, y\rangle$, $x \mapsto \|x\|$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Caratterizzazione del punto di minima distanza in termini di distanza o di prodotto scalare, nei casi di un insieme generico e di un convesso. Caratterizzazione del punto di minima distanza nel caso di un sottospazio affine o vettoriale. Ortogonalità in uno spazio con prodotto scalare: ortogonalità fra due vettori, sottospazio ortogonale a un vettore, sottospazio ortogonale a un insieme di vettori. Somma diretta di un sottospazio con il suo ortogonale. Uno spazio di Hilbert è sempre la somma diretta di un qualsiasi sottospazio chiuso con il relativo ortogonale. Proiezioni ortogonali associate a un sottospazio chiuso e loro proprietà. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Come si trova esplicitamente la proiezione ortogonale su un sottospazio generato da una base finita $v_1, \dots, v_n$, nel caso generale e quando la base sia ortonormale. *In uno spazio normato, se aggiungiamo un vettore a un sottospazio chiuso otteniamo un nuovo sottospazio pure lui chiuso.*

Somme infinite di vettori. Definizione di sommabilità per una famiglia di vettori in uno spazio normato. Condizione di Cauchy per la sommabilità. La sommabilità implica la condizione di Cauchy. La condizione di Cauchy implica che gli indici con vettore non nullo sono al più numerabili. La condizione di convergenza assoluta implica la condizione di Cauchy. In uno spazio completo la condizione di Cauchy implica la sommabilità. Il caso speciale di una somma infinita di numeri reali ≥ 0. Il criterio della convergenza assoluta implica la condizione di Cauchy in qualsiasi spazio normato. La convergenza semplice della serie armonica a segni alterni, che non converge assolutamente. Cenno alla non commutatività della somma di serie che convergono solo semplicemente. La sommabilità è infinitamente commutativa, cioè la somma non cambia permutando gli indici. In dimensione finita la sommabilità è equivalente alla convergenza assoluta, e all'integrabilità rispetto alla misura del conteggio. Due esempi di famiglie sommabili che non hanno la proprietà della convergenza assoluta.

Sistemi ortonormali in spazi di Hilbert. Condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di una famiglia ortogonale di vettori in uno spazio di Hilbert. Il teorema di Pitagora per infiniti vettori ortogonali. I coefficienti di Fourier $\hat{x}(\lambda) := \langle x, u_\lambda \rangle$ di un vettore $x \in H$ formano un vettore in $\ell^2(\Lambda)$. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ è lineare, continua e suriettiva da H su $\ell^2(\Lambda)$. Un lemma sulla minima distanza di un vettore da un convesso in uno spazio con prodotto scalare. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert.* Definizione di base hilbertiana di uno spazio di Hilbert. *Varie caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Distinzione fra basi vettoriali e basi hilbertiane. Osservazioni sulle basi vettoriali di uno spazio vettoriale, soprattutto quando lo spazio è anche normato e completo. Esistenza di basi hilbertiane numerabili per spazi separabili. Teorema di esistenza di basi hilbertiane in generale, usando l'assioma di scelta. Cenni alle ondine di Haar e alla base trigonometrica di $L^2(0, \pi)$.

Insiemi compatti o precompatti in spazi normati. Generalità sui compatti e precompatti negli spazi metrici. Il problema degli insiemi compatti in spazi normati a dimensione infinita. La "base canonica" di $\ell^2(\mathbb{N})$ è un insieme limitato e chiuso ma non compatto. In uno spazio normato a dimensione infinita esiste una successione di versori x_n tali che ognuno dista da tutti gli altri almeno $1/2$, e quindi non può avere sottosuccessioni convergenti. I chiusi limitati non sono necessariamente compatti in dimensione infinita. In uno spazio normato a dimensione infinita, i sottinsiemi (pre)compatti hanno parte interna vuota. In uno spazio normato X, dato un sottospazio chiuso M e un $\bar{y} \in X \setminus M$, le due proiezioni sulle componenti della somma diretta $\mathrm{span} M \cup \{\bar{y}\} = M \oplus (\mathbb{C}\bar{y})$ sono continue. Inoltre, se M è completo, anche $\mathrm{span} M \cup \{\bar{y}\}$ è completo. I sottospazi a dimensione finita di uno spazio normato sono omeomorfi a un $\mathbb{C}^n$ (o a un $\mathbb{R}^n$). Teorema sull'estrazione di infinite sottosuccessioni: se abbiamo una matrice reale a due indici $x_n(k)$, con $n, k \in \mathbb{N}$, tale che l'insieme $\{x_n(k) : n \in \mathbb{N}\}$ sia limitato per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora esiste una $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che la successione $n \mapsto x_{\varphi(n)}(k)$ converge per ogni k fissato (prima parte). *Teorema delle infinite estrazioni:* se abbiamo una matrice reale a due indici $A_n(k)$, con $n, k \in \mathbb{N}$, tale che l'insieme $\{A_n(k) : n \in \mathbb{N}\}$ sia limitato per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora esiste una $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che la successione $n \mapsto x_{\varphi(n)}(k)$ converge per ogni k fissato. *Il teorema di Ascoli-Arzelà.* Esempi di insiemi compatti nello spazio delle funzioni continue. Il cubo di Hilbert.

Operatori compatti fra spazi normati. Definizione di operatore lineare compatto fra due spazi normati. Formulazione in termini di successioni. Gli operatori compatti sono continui. Somma di operatori compatti è compatta. Composizione di operatori lineari continui, di cui almeno uno è compatto, è compatta. Lo spazio normato degli operatori lineari continui fra due spazi normati. *L'insieme degli operatori compatti è uno spazio vettoriale chiuso dello spazio degli operatori lineari continui.* Operatori con rango finito. Ogni operatore compatto a valori in uno spazio di Hilbert si può approssimare in norma operatoriale con una successione di operatori di rango finito. L'operatore integrale è compatto sullo spazio delle funzioni continue. L'operatore che manda $(x_1, x_2, x_2, \dots)$ in $(x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ è compatto da ℓ^p in sé, se $1 < p < +\infty$. Richiami sul duale di uno spazio normato. Definizione di aggiunto di un operatore lineare fra spazi normati. La norma operatoriale dell'aggiunto è uguale alla norma operatoriale dell'operatore di partenza. *Se un operatore lineare è compatto, anche il suo aggiunto è compatto.* Richiami sull'iniezione canonica nel biduale e sul biaggiunto di un operatore. *Se un operatore ha l'aggiunto compatto, allora è lui stesso compatto.* Un lemma sulla continuità dell'inversa di un operatore lineare continuo e iniettivo fra spazi normati. *Un operatore compatto può avere immagine completa solo se ha rango finito.*

Operatori compatti fra spazi di Hilbert. Richiami sul teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Identificazione fra uno spazio di Hilbert e il suo duale, e relazioni con l'immersione canonica nel biduale. L'aggiunto hilbertiano di un operatore lineare continuo fra due spazi di Hilbert. Relazione fra l'aggiunto hilbertiano e quello non hilbertiano. Richiami sulla convergenza debole negli spazi normati e in quelli di Hilbert. Ogni successione limitata in uno spazio di Hilbert ha una sottosuccessione che converge debolmente (senza dimostrazione). Un operatore continuo fra spazi di Hilbert è compatto se e solo se trasforma successioni convergenti debolmente in successioni convergenti fortemente. Operatori autoaggiunti: nucleo e la chiusura dell'immagine sono l'ortogonale uno dell'altro, gli autovalori sono reali, gli autovettori con autovalori distinti sono ortogonali. *Forme quadratiche costruite con un operatore autoaggiunto compatto: caratterizzazione dell'estremo sulla sfera unitaria. Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto. Teorema di diagonalizzazione degli operatori compatti autoaggiunti.* Caratterizzazione degli operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert in termini di decomposizione spettrale. Il teorema dell'alternativa di Fredholm per il problema $x - Ax = y$ con A compatto. Versione del teorema dell'alternativa per il problema $\mu x - Ax = y$.

Operatori nucleo integrale e il problema di Sturm-Liouville. L'operatore nucleo integrale $A_K f(x) := \int_a^b K(x, y)f(y)dy$. Se K è in $L^2([a, b]\times[a, b])$ la A_K è lineare compatta da $L^2([a, b])$ in sé. Se K è continua su $[a, b]\times[a, b]$ allora A_K è lineare compatta da $\mathcal{C}([a, b])$ in sé. L'operatore differenziale $Lu = -(\psi u')' + \varphi u$. Il wronskiano di due soluzioni dell'equazione omogenea $Lu = 0$. Il metodo della variazione delle costanti per risolvere l'equazione non omogenea $Lu = f$. L'operatore nucleo integrale A_K che dà una soluzione di $Lu = f$. Le autofunzioni di A_K sono di classe $\mathcal{C}^2$ e sono autofunzioni anche di L. Il problema di Sturm-Liouville per l'equazione $Lu = -(\psi u')' + \varphi u = f$ con le condizioni omogenee al contorno $B_a u = \alpha_1 u(a)+\beta_1 u'(a) = 0$, $B_b u = \alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b) = 0$. Soluzione del problema nel caso non degenere, quando il problema omogeneo $Lu = 0$, $B_a u = B_b u = 0$ ha soltanto la soluzione nulla. Corrispondenza fra autovalori e autofunzioni di L e di A. Studio di un problema di Sturm-Liouville esplicito.

La trasformata di Fourier. Convenzione sulla misura di Lebesgue sulla retta reale divisa per $\sqrt{2\pi}$. Richiami sul prodotto di convoluzione di funzioni di $L^1(\mathbb{R})$. La definizione di trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$. Prime proprietà: comportamento della trasformata di Fourier per traslazione, torsione, omotetia, ribaltamento, convoluzione, derivata. Proprietà delle traslate di una funzione di $L^p(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ è continua e infinitesima all'infinito. Alcune famiglie di funzioni ausiliarie H_λ, h_λ di cui si possono calcolare le trasformate esplicitamente. *Proprietà delle mollificate tramite h_λ. Il teorema di inversione nelle ipotesi $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.* Esercizi sulla trasformata di Fourier.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
2. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso si ottiene un sottospazio chiuso.
3. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.
4. Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.
5. Il metodo diagonale per infinite estrazioni di sottosuccessioni.
6. Il teorema di Ascoli-Arzelà.
7. L'insieme degli operatori compatti $X \to Y$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X, Y)$ con la norma operatoriale.
8. Un operatore lineare è compatto se e solo se il suo aggiunto è compatto.
9. Un operatore compatto può avere immagine completa solo se l'immagine ha dimensione finita.
10. Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto.
11. Il teorema di decomposizione spettrale per gli operatori autoaggiunti compatti.
12. Il teorema dell'alternativa di Fredholm sulla risolubilità dell'equazione $x - Ax = y$ quando A è un operatore compatto su uno spazio di Hilbert.
13. Il teorema di inversione della trasformata di Fourier nelle ipotesi $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, comprese le premesse sulle convoluzioni $f * h_\lambda$.
14. Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.