Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Spazi di Hilbert, operatori compatti, trasformata di Fourier

Teoria elementare degli spazi di Hilbert. Assiomi del prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso. Prime conseguenze. La disuguaglianza di Schwarz. La norma indotta da un prodotto scalare. La disuguaglianza triangolare. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert e di spazi con prodotto scalare. Continuità delle funzioni $x \mapsto \langle x, y\rangle$, $x \mapsto \|x\|$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. Esempio di uno spazio con prodotto scalare ma non di Hilbert. L'identità di polarizzazione e l'identità del parallelogrammo negli spazi con prodotto scalare. L'identità del parallelogrammo caratterizza le norme che derivano da un prodotto scalare, con cenno di dimostrazione. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Caratterizzazione del punto di minima distanza in termini di distanza o di prodotto scalare, nei casi di un insieme generico, di un convesso, di un sottospazio affine o vettoriale. Ortogonalità in uno spazio con prodotto scalare: ortogonalità fra due vettori, sottospazio ortogonale a un vettore, sottospazio ortogonale a un insieme di vettori, somma diretta di un sottospazio con il suo ortogonale. Uno spazio di Hilbert è sempre la somma diretta di un qualsiasi sottospazio chiuso con il relativo ortogonale. Proiezioni ortogonali associate a un sottospazio chiuso e loro proprietà. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Come si trova esplicitamente la proiezione ortogonale su un sottospazio generato da una base finita $u_1, \ldots, u_n$, nel caso generale e quando la base sia ortonormale. *In uno spazio normato, se aggiungiamo un vettore a un sottospazio chiuso otteniamo un nuovo sottospazio pure lui chiuso.* Il duale di uno spazio di Hilbert. Isometria fra il duale e lo spazio. Il duale è anch'esso di Hilbert. Il biduale. Gli spazi di Hilbert sono riflessivi.

Somme infinite di vettori. Come definire somme infinite. La serie armonica a segni alterni $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 \cdots$ può convergere a qualsiasi cosa se si permutano opportunamente gli addendi, con cenno di dimostrazione. La condizione di convergenza assoluta $\sum \|x_n\| < +\infty$ implica che la somma $\sum x_n$ è commutativa, cioè converge indipendentemente da possibili permutazioni. Se i vettori x_n sono in uno spazio con dimensione finita, la convergenza assoluta è equivalente alla commutatività.

Se i vettori x_n sono in uno spazio a dimensione infinita, la convergenza assoluta non è necessaria per la commutatività. Somma di numeri positivi: definizione come estremo superiore di tutte le possibili sottosomme finite, oppure come integrale rispetto alla misura del conteggio. Definizione di sommabilità per una famiglia di vettori in uno spazio normato. Condizione di Cauchy per la sommabilità. Definizione di sommabilità per una famiglia di vettori in uno spazio normato. Condizione di Cauchy per la sommabilità. La sommabilità implica la condizione di Cauchy. La condizione di Cauchy implica che gli indici con vettore non nullo sono al più numerabili. La condizione di convergenza assoluta implica la condizione di Cauchy. In uno spazio completo la condizione di Cauchy implica la sommabilità. La condizione di Cauchy implica la convergenza assoluta in dimensione finita, ma non in dimensione infinita.

Sistemi ortonormali in spazi di Hilbert. Condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di una famiglia ortogonale di vettori in uno spazio di Hilbert. Un lemma sulla minima distanza di un vettore da un convesso in uno spazio con prodotto scalare. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert.* I coefficienti di Fourier $\hat{x}(\lambda) := \langle x, u_\lambda \rangle$ di un vettore $x \in H$ formano un vettore in $\ell^2(\Lambda)$. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ è lineare, continua e suriettiva da H su $\ell^2(\Lambda)$. Definizione di base hilbertiana di uno spazio di Hilbert. Osservazioni sulle basi vettoriali di uno spazio vettoriale, soprattutto quando lo spazio è anche normato e completo. *Varie caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Distinzione fra basi vettoriali e basi hilbertiane. Esistenza di basi hilbertiane numerabili per spazi separabili. Teorema di esistenza di basi hilbertiane in generale, usando l'assioma di scelta. Gli spazi di Hilbert sono tutti isometrici a un qualche $\ell^2(\Lambda)$. Il teorema "di Pitagora" in spazi con prodotto scalare: se gli x_λ sono una famiglia ortogonale di vettori e se $s = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$, allora $\|s\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|^2$. Cenni alle ondine di Haar e alla base trigonometrica di $L^2(0, \pi)$.

Insiemi compatti o precompatti in spazi normati. Il problema degli insiemi compatti in spazi normati a dimensione infinita. La "base canonica" di $\ell^2(\mathbb{N})$ è un insieme limitato e chiuso ma non compatto. In uno spazio normato a dimensione infinita esiste una successione di versori x_n tali che ognuno dista da tutti gli altri almeno $1/2$, e quindi non può avere sottosuccessioni convergenti. I chiusi limitati non sono necessariamente compatti in dimensione infinita. Generalità sui compatti e precompatti negli spazi metrici. Il passaggio a sottosuccessione e il suo iterato. *Il metodo diagonale per infinite estrazioni di sottosuccessioni:* se abbiamo una matrice reale a due indici $x_n(k)$, con $n, k \in \mathbb{N}$, tale che l'insieme $\{x_n(k) : n \in \mathbb{N}\}$ sia limitato per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora esiste una $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che la successione $n \mapsto x_{\varphi(n)}(k)$ converge per ogni k fissato. *Il teorema di Ascoli-Arzelà.* Esempi di insiemi precompatti nello spazio delle funzioni continue. Operatori lineari compatti fra spazi di Banach, con primi esempi. Definizione di operatore aggiunto di un operatore lineare continuo fra due spazi normati. La norma dell'aggiunto è uguale alla norma dell'operatore di partenza. L'operatore aggiunto hilbertiano di un operatore lineare continuo fra spazi di Hilbert. La relazione fra i due tipi di aggiunti usando il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. In uno spazio normato X, dato un sottospazio chiuso M e un $\bar{y} \in X \setminus M$, le due proiezioni sulle componenti della somma diretta $\operatorname{span} M \cup \{\bar{y}\} = M \oplus (\mathbb{C}\bar{y})$ sono continue. Inoltre, se M è completo, anche $\operatorname{span} M \cup \{\bar{y}\}$ è completo. I sottospazi a dimensione finita di uno spazio normato sono omeomorfi a un $\mathbb{C}^n$ (o a un $\mathbb{R}^n$). Il cubo di Hilbert è compatto in ℓ^2. Esempio di un operatore compatto $\ell^2 \to \ell^2$ non banale, che sfrutta il cubo di Hilbert.

Operatori compatti fra spazi normati. Gli operatori compatti sono continui. *L'insieme degli operatori compatti $X \to Y$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{L}(X, Y)$ con la norma operatoriale.* Gli operatori di rango finito sono compatti. Se H è uno spazio di Hilbert, ogni operatore compatto $X \to H$ è approssimabile in norma operatoriale da una successione di operatori di rango finito. *Se un operatore lineare è compatto, anche il suo aggiunto è compatto.* Richiami sull'iniezione canonica nel biduale e sul biaggiunto di un operatore. *Se un operatore ha l'aggiunto compatto, allora è lui stesso compatto.* Se in una composizione di operatori continui uno è compatto, allora la composizione è compatta. Un lemma sulla continuità dell'inversa di un operatore lineare continuo e iniettivo fra spazi normati. *Un operatore compatto può avere immagine completa solo se l'immagine ha dimensione finita.*

Operatori compatti fra spazi di Hilbert. La convergenza debole negli spazi di Hilbert. Ogni successione limitata in uno spazio di Hilbert ha una sottosuccessione che converge debolmente. Un operatore continuo fra spazi di Hilbert è compatto se e solo se trasforma successioni convergenti debolmente in successioni convergenti fortemente.

Operatori compatti da uno spazio di Hilbert in sé. Operatori autoaggiunti: nucleo e la chiusura dell'immagine sono l'ortogonale uno dell'altro, gli autovalori sono reali, gli autovettori con autovalori distinti sono ortogonali. Forme quadratiche costruite con un operatore autoaggiunto: caratterizzazione dell'estremo sulla sfera unitaria. *Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto.* Gli autospazi degli operatori compatti hanno dimensione finita (se l'autovalore è non nullo). Esempio di un operatore compatto senza autovalori. *Teorema spettrale di diagonalizzazione degli operatori compatti autoaggiunti.* Caratterizzazione degli operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert in termini di decomposizione spettrale. *Il teorema dell'alternativa di Fredholm sulla risolubilità dell'equazione $x - Ax = y$ quando A è un operatore compatto su uno spazio di Hilbert.* Versione del teorema dell'alternativa per il problema $\mu x - Ax = y$. Forma esplicita della soluzione nel caso in cui A sia anche autoaggiunto.

Operatori nucleo integrale. L'operatore nucleo integrale $Af(x) := \int_a^b K(x,y) f(y)dy$. Se $K \in L^q$ e $f \in L^p$ allora $Af \in L^1$. Se $K \in L^2$ e $f \in L^2$ allora $Af \in L^2$. Se K è continuo, o addirittura se $K \in L^2$, allora $A\colon L^2 \to L^2$ è compatto. Se $K(y,x) = \overline{K(y,x)}$ allora A è anche autoaggiunto.

Il problema di Sturm-Liouville. L'operatore differenziale $Lu = -(\psi u')' + \varphi u$. Il wronskiano di due soluzioni dell'equazione omogenea $Lu = 0$. Il metodo della variazione delle costanti per risolvere l'equazione non omogenea $Lu = f$. Una soluzione di $Lu = f$ è ottenibile come operatore nucleo integrale $u = Af$ se sono note due soluzioni linearmente indipendenti di $Lu = 0$. Il problema di Sturm-Liouville per l'equazione $Lu = -(\psi u')' + \varphi u = f$ con le condizioni omogenee al contorno $B_1 u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, $B_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$. Se u_1 risolve $Lu_1 = 0$ con $B_2 u_1 = 0$ e u_2 risolve $Lu_2 = 0$ con $B_1 u_2 = 0$, le due soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se il problema omogeneo $Lu = 0$, $B_1 u = 0$, $B_2 u = 0$ ha solo la soluzione banale nulla, e in tal caso $u = Af$ risolve il problema ai limiti $Lu = f$, $B_1 u = B_2 u = 0$. Corrispondenza fra autovalori e autofunzioni di L e di A. Studio di alcuni problemi di Sturm-Liouville espliciti.

La trasformata di Fourier. Convenzione sulla misura di Lebesgue sulla retta reale divisa per $\sqrt{2\pi}$. Richiami sul prodotto di convoluzione di funzioni di $L^1(\mathbb{R})$. La definizione di trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$. Prime proprietà: comportamento della trasformata di Fourier per traslazione, torsione, omotetia, ribaltamento, convoluzione, derivata. Proprietà delle traslate di una funzione di $L^p(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ è continua e infinitesima all'infinito. Alcune funzioni ausiliarie H_λ, h_λ di cui si possono calcolare le trasformate esplicitamente. *Il teorema di inversione nelle ipotesi $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in* $L^2(\mathbb{R})$. Osservazioni generali sulla trasformata di Fourier in L^2. Esercizi sulla trasformata di Fourier.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
2. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso si ottiene un sottospazio chiuso.
3. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.
4. Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.
5. Il metodo diagonale per infinite estrazioni di sottosuccessioni.
6. Il teorema di Ascoli-Arzelà.
7. L'insieme degli operatori compatti $X \to Y$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X, Y)$ con la norma operatoriale.
8. Un operatore lineare è compatto se e solo se il suo aggiunto è compatto.
9. Un operatore compatto può avere immagine completa solo se l'immagine ha dimensione finita.
10. Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto. Il teorema spettrale per gli operatori autoaggiunti compatti.
11. Il teorema dell'alternativa di Fredholm sulla risolubilità dell'equazione $x - Ax = y$ quando A è un operatore compatto su uno spazio di Hilbert.
12. Il teorema di inversione della trasformata di Fourier nelle ipotesi $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, comprese le premesse sulle convoluzioni $f * h_\lambda$.
13. Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.