Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Spazi di Hilbert, serie di Fourier, spazi di Banach

Teoria elementare degli spazi di Hilbert. Assiomi del prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso. Prime conseguenze. La disuguaglianza di Schwarz. La norma indotta da un prodotto scalare. La disuguaglianza triangolare. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert e di spazi con prodotto scalare. Continuità delle funzioni $x \mapsto \langle x, y\rangle$, $x \mapsto \|x\|$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. L'identità di polarizzazione e l'identità del parallelogrammo negli spazi con prodotto scalare. L'identità del parallelogrammo caratterizza le norme che derivano da un prodotto scalare, con cenno di dimostrazione. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Non unicità nel caso di norme non derivanti da prodotto scalare. Caratterizzazione del punto di minima distanza in termini di distanza o di prodotto scalare, nei casi di un insieme generico, di un convesso, di un sottospazio vettoriale. Definizione di ortogonalità fra due vettori e di sottospazio ortogonale a un vettore o a un insieme di vettori. Decomposizione in somma diretta di uno spazio di Hilbert in un sottospazio chiuso col suo ortogonale. La proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso. Il duale di uno spazio di Hilbert. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Isometria fra il duale e lo spazio. Il duale è anch'esso di Hilbert. Il biduale. Gli spazi di Hilbert sono riflessivi. Nel caso che il sottospazio sia a dimensione finita con base assegnata, come trovare la proiezione ortogonale risolvendo un sistema lineare. *In uno spazio normato, se si aggiunge un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso.* I sottospazi a dimensione finita sono sempre chiusi.

Sistemi ortonormali. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio generato da un sistema ortonormale finito. Il problema di come generalizzare la formula a sistemi ortonormali infiniti. Come definire somme infinite. La serie armonica a segni alterni $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 \cdots$ può convergere a qualsiasi cosa se si permutano opportunamente gli addendi, con cenno di dimostrazione. La condizione di convergenza assoluta $\sum \|x_n\| < +\infty$ implica che la somma $\sum x_n$ è commutativa, cioè converge indipendentemente da possibili permutazioni. Se i vettori x_n sono in uno spazio con dimensione finita, la convergenza assoluta è equivalente alla commutatività. Se i vettori x_n sono in uno spazio a dimensione infinita, la convergenza assoluta non è necessaria per la commutatività. Somma di numeri positivi: definizione come estremo superiore di tutte le possibili sottosomme finite, oppure come integrale rispetto alla misura del conteggio. Definizione di sommabilità per una famiglia di vettori in uno spazio normato. Condizione di Cauchy per la sommabilità. La sommabilità implica la condizione di Cauchy. La condizione di Cauchy implica che gli indici con vettore non nullo sono al più numerabili. Somme infinite di numeri reali o complessi viste come integrali rispetto alla misura del conteggio, o (nel caso di numeri reali non negativi) come estremo superiore delle somme sui sottinsiemi finiti. La condizione di convergenza assoluta implica la condizione di Cauchy. In uno spazio completo la condizione di Cauchy implica la sommabilità. La condizione di Cauchy implica la convergenza assoluta in dimensione finita, ma non in dimensione infinita. Condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di una famiglia ortogonale di vettori. Un lemma sulla minima distanza fra un convesso chiuso e un vettore. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sul sottospazio chiuso generato da una famiglia ortonormale.* L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ che associa a un vettore la famiglia dei suoi coefficienti di Fourier rispetto a un sistema ortonormale fissato. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ è lineare, continua (non espansiva) e suriettiva $H \to \ell^2(\Lambda)$. Definizione di base hilbertiana di uno spazio di Hilbert. *Varie caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Distinzione fra basi vettoriali e basi hilbertiane. Esistenza di basi hilbertiane numerabili per spazi separabili. Teorema di esistenza di basi hilbertiane in generale, usando l'assioma di scelta. Gli spazi di Hilbert sono tutti isometrici a un qualche $\ell^2(\Lambda)$. Cenni alle ondine di Haar e alla base trigonometrica di $L^2(0, \pi)$.

Insiemi compatti o precompatti in spazi normati. Il problema degli insiemi compatti in spazi normati a dimensione infinita. Un lemma sull'esistenza di un versore che disti almeno 2/3 da un sottospazio chiuso in uno spazio normato. In uno spazio normato a dimensione infinita esiste una successione di versori x_n tali che ognuno dista da tutti gli altri almeno 2/3, e quindi non può avere sottosuccessioni convergenti. I chiusi limitati non sono necessariamente compatti in dimensione infinita. *Il metodo diagonale per infinite estrazioni di sottosuccessioni:* se abbiamo una matrice reale a due indici $x_n(k)$, con $n, k \in \mathbb{N}$, tale che l'insieme $\{x_n(k) : n \in \mathbb{N}\}$ sia limitato per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora esiste una $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che la successione $n \mapsto x_{\varphi(n)}(k)$ converge per ogni k fissato. Generalità sui compatti e precompatti negli spazi metrici. *Il teorema di Ascoli-Arzelà.* Esempi di insiemi precompatti nello spazio delle funzioni continue. Operatori lineari compatti fra spazi di Banach. Cenno a caratterizzazioni degli insiemi precompatti in L^2. Il cubo di Hilbert.

L'aggiunto di un operatore. Definizione di operatore aggiunto di un operatore lineare continuo fra due spazi normati. La norma dell'aggiunto è uguale alla norma dell'operatore di partenza. L'operatore aggiunto hilbertiano di un operatore lineare continuo fra spazi di Hilbert. La relazione fra i due tipi di aggiunti usando il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.

Operatori compatti. In uno spazio normato X, dato un sottospazio chiuso M e un $\bar{y} \in X \setminus M$, le due proiezioni sulle componenti della somma diretta $\operatorname{span} M \cup \{\bar{y}\} = M \oplus (\mathbb{C}\bar{y})$ sono continue. Inoltre, se M è completo, anche $\operatorname{span} M \cup \{\bar{y}\}$ è completo. I sottospazi a dimensione finita di uno spazio normato sono omeomorfi a un $\mathbb{C}^n$ (o a un $\mathbb{R}^n$). Operatori (lineari) compatti fra spazi normati. Gli operatori compatti sono continui. *L'insieme degli operatori compatti $X \to Y$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X, Y)$ con la norma operatoriale.* Gli operatori di rango finito sono compatti. Se Y è uno spazio di Hilbert separabile, ogni operatore compatto è approssimabile in norma operatoriale da una successione di operatori di rango finito. Richiami sull'iniezione canonica nel biduale e sul biaggiunto di un operatore. *Un operatore lineare è compatto se e solo se il suo aggiunto è compatto.* Se in una composizione di operatori continui uno è compatto, allora la composizione è compatta. Un lemma sulla continuità dell'inversa di un operatore lineare continuo e iniettivo fra spazi normati. *Un operatore compatto può avere immagine completa solo se l'immagine ha dimensione finita.* La convergenza debole negli spazi di Hilbert. Ogni successione limitata in uno spazio di Hilbert ha una sottosuccessione che converge debolmente. Un operatore continuo fra spazi di Hilbert è compatto se e solo se trasforma successioni convergenti debolmente in successioni convergenti fortemente.

Operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert. Operatori autoaggiunti: nucleo e immagine sono l'ortogonale uno dell'altro, gli autovalori sono reali, gli autovettori con autovalori distinti sono ortogonali. Forme quadratiche costruite con un operatore autoaggiunto: caratterizzazione dell'estremo sulla sfera unitaria. *Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto. Il teorema spettrale per gli operatori autoaggiunti compatti.* Caratterizzazione degli operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert in termini di decomposizione spettrale. Gli operatori compatti fra spazi di Hilbert sono il limite in norma di successioni di operatori di rango finito. *Il teorema dell'alternativa di Fredholm sulla risolubilità dell'equazione $x - Ax = y$ quando A è un operatore compatto su uno spazio di Hilbert.* Versione del teorema dell'alternativa per il problema $\mu x - Ax = y$. Forma esplicita della soluzione nel caso in cui A sia anche autoaggiunto.

Il problema di Sturm-Liouville. L'operatore nucleo integrale $Af(x) := \int_a^b K(x,y)f(y)dy$. Se $K \in L^q$ e $f \in L^p$ allora $Af \in L^p$. Se K è continuo, o addirittura se $K \in L^2$, allora $A\colon L^2 \to L^2$ è compatto. Se $K(y,x) = \overline{K(y,x)}$ allora A è anche autoaggiunto. Il problema di Sturm-Liouville per l'equazione $Lu = -(\psi u')' + \varphi u = f$ con le condizioni omogenee al contorno $B_1 u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, $B_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$. Il wronskiano W di due soluzioni di $Lu = 0$ è tale che $\psi W =$ costante. Il metodo della variazione delle costanti per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea $Lu = f$ supponendo di avere due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea $Lu = 0$. Una soluzione della non omogenea si può riscrivere in termini di f come un operatore nucleo integrale. Se u_1 risolve $Lu_1 = 0$ con $B_1 u_1 = 0$ e u_2 risolve $Lu_2 = 0$ con $B_2 u_2 = 0$, le due soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se il problema omogeneo $Lu = 0$, $B_1 u = 0$, $B_2 u = 0$ ha solo la soluzione banale nulla. In tal caso l'operatore nucleo integrale Af fornisce l'unica soluzione del problema non omogeneo iniziale. Corrispondenza fra autovalori e autovettori di L e di A. Espressione della soluzione come serie di autofunzioni. Esercizi.

La trasformata di Fourier. Convenzione sulla misura di Lebesgue sulla retta reale divisa per $\sqrt{2\pi}$. Richiami sul prodotto di convoluzione di funzioni di $L^1(\mathbb{R})$. La definizione di trasformata di Fourier $\hat{f}$ di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$. Prime proprietà: comportamento della trasformata di Fourier per traslazione, torsione, omotetia, ribaltamento, convoluzione, derivata. Proprietà delle traslate di una funzione di $L^p(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ è continua e infinitesima all'infinito. Alcune funzioni ausiliarie H_λ, h_λ di cui si possono calcolare le trasformate esplicitamente. *Il teorema di inversione della trasformata di Fourier nelle ipotesi $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.* Applicazione della trasformata di Fourier alla caratterizzazione dei sottospazi vettoriali chiusi di $L^2(\mathbb{R})$ che sono invarianti per traslazioni. Definizione di algebra di Banach, con esempi. Omomorfismi complessi su un'algebra di Banach. Tali omomorfismi sono automaticamente continui. Gli omomorfismi complessi non banali su $L^1(\mathbb{R})$, dotato della convoluzione come prodotto, sono tutti e soli della forma $f \mapsto \hat{f}(t_0)$ per un qualche $t_0 \in \mathbb{R}$. Esercizi sulla trasformata di Fourier.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
2. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso si ottiene un sottospazio chiuso.
3. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.
4. Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.
5. Il metodo diagonale per infinite estrazioni di sottosuccessioni.
6. Il teorema di Ascoli-Arzelà.
7. L'insieme degli operatori compatti $X \to Y$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X, Y)$ con la norma operatoriale.
8. Un operatore lineare è compatto se e solo se il suo aggiunto è compatto.
9. Un operatore compatto può avere immagine completa solo se l'immagine ha dimensione finita.
10. Gli operatori autoaggiunti e compatti hanno sempre autovettori con autovalore la norma operatoriale o il suo opposto. Il teorema spettrale per gli operatori autoaggiunti compatti.
11. Il teorema dell'alternativa di Fredholm sulla risolubilità dell'equazione $x - Ax = y$ quando A è un operatore compatto su uno spazio di Hilbert.
12. Il teorema di inversione della trasformata di Fourier nelle ipotesi $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, comprese le premesse sulle convoluzioni $f * h_\lambda$.
13. Il teorema di Plancherel sulla trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.