Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Spazi di Hilbert, serie di Fourier, spazi di Banach

Teoria elementare degli spazi di Hilbert. Assiomi del prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso. Prime conseguenze. La disuguaglianza di Schwarz. La norma indotta da un prodotto scalare. La disuguaglianza triangolare. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert e di spazi con prodotto scalare. Continuità delle funzioni $x \mapsto \langle x, y$, $x \mapsto \|x\|$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. L'identità di polarizzazione e l'identità del parallelogrammo negli spazi con prodotto scalare. L'identità del parallelogrammo caratterizza le norme che derivano da un prodotto scalare, con cenno di dimostrazione. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Non unicità nel caso di norme non derivanti da prodotto scalare. Caratterizzazione del punto di minima distanza in termini di distanza o di prodotto scalare, nei casi di un insieme generico, di un convesso, di un sottospazio affine e di un sottospazio vettoriale. Definizione di ortogonalità fra due vettori e di sottospazio ortogonale a un vettore o a un insieme di vettori. Decomposizione in somma diretta di uno spazio di Hilbert in un sottospazio chiuso col suo ortogonale. La proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso e il teorema generalizzato di Pitagora. Il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert come prodotti scalari con vettori costanti. *In uno spazio normato, se si aggiunge un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso.* I sottospazi a dimensione finita sono sempre chiusi.

Sistemi ortonormali. Sistemi di vettori ortogonali o ortonormali in uno spazio con prodotto scalare. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio generato da un sistema ortonormale finito. Il problema di come generalizzare la formula a sistemi ortonormali infiniti. Se una serie reale converge, ma non assolutamente, la somma dipende dall'ordine in cui si fa la somma (cenno di dimostrazione). Pro e contro delle somme infinite come limite di somme parziali, eventualmente con la condizione di convergenza assoluta, come integrali rispetto alla misura del conteggio, o (nel caso di numeri reali non negativi) come estremo superiore delle somme sui sottinsiemi finiti. Definizione di sommabilità per una famiglia di vettori in uno spazio normato. Condizione di Cauchy per la sommabilità. La sommabilità implica la condizione di Cauchy. La condizione di convergenza assoluta implica la condizione di Cauchy. La condizione di Cauchy implica che gli indici con vettore non nullo sono al più numerabili. In uno spazio completo la condizione di Cauchy implica la sommabilità. La condizione di Cauchy implica la convergenza assoluta in dimensione finita, ma non in dimensione infinita. Condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di una famiglia ortogonale di vettori. Un lemma sulla minima distanza fra un convesso chiuso e un vettore. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sul sottospazio chiuso generato da una famiglia ortonormale.* Lo spazio $\ell^2(\Lambda)$. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ che associa a un vettore la famiglia dei suoi coefficienti di Fourier rispetto a un sistema ortonormale fissato. Se gli x_λ sono ortogonali e $\sum x_\lambda$ è sommabile, allora $\|\sum x_\lambda\|^2 = \sum \|x_\lambda\|^2$ (teorema di Pitagora generalizzato). L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ è lineare, continua (non espansiva) e suriettiva $H \to \ell^2(\Lambda)$. Definizione di base hilbertiana di uno spazio di Hilbert. *Varie caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Distinzione fra basi vettoriali e basi hilbertiane. Teorema di esistenza di basi hilbertiane in generale, usando l'assioma di scelta. Esistenza di basi hilbertiane numerabili per spazi separabili.

Serie di Fourier. Cenno alle ondine di Haar come base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R})$. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ e le sue principali proprietà nelle varie qualità di spazio topologico, metrico, varietà differenziabile, gruppo moltiplicativo, curva parametrica, spazio di misura. Il ruolo dell'esponenziale complesso $t \mapsto e^{it}$ nel trasferire proprietà di $\mathbb{R}$ in proprietà di $\mathbb{U}$. La corrispondenza fra funzioni periodiche definite su $\mathbb{R}$ e funzioni definite su $\mathbb{U}$. La misura di Lebesgue normalizzata sul cerchio unitario. Integrazione sul cerchio unitario, con le formule di collegamento con l'integrale su $\mathbb{R}$. Le potenze complesse $z \mapsto z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) sul cerchio unitario formano una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$. Verifica che formano un sistema ortonormale. L'onda quadra: calcolo dei suoi coefficienti di Fourier rispetto alla base delle potenze complesse. Il problema della convergenza puntuale della serie di Fourier. L'identità di Bessel applicata all'onda quadra e la formula notevole $1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \cdots = \pi^2/8$. Basi hilbertiane di $L^2(\mathbb{U})$ formate da funzioni a valori reali e versione tutta reale della serie di Fourier. Prodotto di convoluzione di due funzioni definite su $\mathbb{R}$. Condizioni di esistenza della convoluzione. La convoluzione è commutativa. Esempi di convoluzione con nuclei regolarizzatori. Definizione di convoluzione fra funzioni periodiche su $\mathbb{R}$ e fra funzioni definite sul cerchio unitario. Polinomi trigonometrici sul cerchio unitario. La convoluzione di una funzione qualsiasi con un polinomio trigonometrico è ancora un polinomio trigonometrico. *Teorema: se ho una successione Q_n di nuclei regolarizzatori definiti su $\mathbb{U}$ a valori reali ≥ 0, tutti con integrale 1 e che tendono a 0 uniformemente fuori da ogni intorno di $1 \in \mathbb{U}$, e se F è una funzione continua su $\mathbb{U}$, allora $F * Q_n$ tende a F uniformemente su $\mathbb{U}$. Costruzione esplicita di una successione di polinomi trigonometrici con le proprietà richieste. Densità dei polinomi trigonometrici in $L^2(\mathbb{U})$.* Il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier. Le somme parziali della serie di Fourier e la loro espressione come convoluzione col nucleo di Dirichlet. Proprietà del nucleo di Dirichlet. *Il lemma di Riemann-Lebesgue.* I coefficienti di Fourier hanno senso anche per funzioni di L^1, non necessariamente di L^2, e sono infinitesimi per $n \to \pm\infty$. *Il teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier in ipotesi tipo-Lipschitz.* Applicazione alla serie di Fourier dell'onda quadra, con deduzione di una serie numerica notevole. La serie di Fourier dell'onda a dente di sega e dell'onda t^2, con serie numeriche notevoli associate. La serie di Fourier di funzioni con derivata continua convergono totalmente. Illustrazioni sulle serie di Fourier. Cenno al fenomeno di Gibbs. Esercizi sugli spazi di Hilbert.

I teoremi fondamentali degli spazi di Banach. Generalità su seminorme,

norme e spazi normati. La norma operatoriale di un operatore lineare fra spazi normati, e le sue varie definizioni equivalenti. Si equivalgono la continuità dappertutto, la continuità in un punto e l'avere norma operatoriale finita. Esempi di operatori lineari non continui. *Il teorema di Baire.* Cenno alla versione più forte nell'ipotesi che lo spazio non abbia punti isolati. *Il teorema di Banach-Steinhaus, o dell'uniforme limitatezza.* Significato geometrico. Il caso di dimensione finita. Cosa succede se non si chiede la completezza nello spazio di partenza. Il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier di funzioni continue. La norma L^1 del nucleo di Dirichlet. Esistenza di funzioni continue la cui serie di Fourier non converge puntualmente in un punto. Esistenza di funzioni continue la cui serie di Fourier non converge puntualmente su un denso con la potenza del continuo. *Il teorema della mappa aperta.* Corollario: un operatore lineare, continuo e biiettivo fra spazi di Banach ha inversa continua. Il teorema del grafico chiuso. Applicazione del teorema della mappa aperta per dimostrare che esistono successioni limitate che non sono i coefficienti di Fourier di alcuna funzione di L^1. Esempio di applicazione lineare continua e biiettiva fra spazi normati con inversa non continua. *Il teorema di Hahn-Banach reale.* Il teorema di Hahn-Banach in versione complessa. Il teorema di Hahn-Banach in versione generica per spazi normati. Il duale di uno spazio normato. Applicazioni del teorema di Hahn-Banach ai duali degli spazi normati: esistenza di estensioni continue di funzionali continui definiti su sottospazi, esistenza di funzionali continui che siano nulli su un dato sottospazio chiuso e non nulli su un dato vettore fuori dal sottospazio. Confronto col caso di spazi di Hilbert. Esempio di non unicità dell'estensione. Esistenza di funzionali lineari continui su L^∞ che non sono della forma $x \mapsto \int x(t)y(t)\,dt$ con $y \in L^1$. Un esempio di applicazione del teorema di Hahn-Banach reale a una questione di analisi convessa in dimensione finita. *Il teorema di Hahn-Banach reale con invarianza.* Il problema delle estensioni finitamente additive della misura di Lebesgue. Il caso del cerchio unitario, con estensione invariante per rotazioni. Il caso della retta reale, con estensione invariante per traslazioni. Il caso del piano bidimensionale con invarianza per rotazioni. Il caso dello spazio tridimensionale e cenno al paradosso di Banach-Tarski. Illustrazioni sul teorema di Hahn-Banach. Esercizi di analisi funzionale.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
2. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso si ottiene un sottospazio chiuso.
3. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.
4. Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.
5. L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio delle funzioni continue sul cerchio unitario, con la norma della convergenza uniforme.
6. La serie di Fourier dell'onda quadra, con serie notevoli associate.
7. Il lemma di Riemann-Lebesgue.
8. Il teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier.
9. Il teorema di Baire.
10. Il teorema di Banach-Steinhaus, o dell'uniforme limitatezza.

11. Il teorema della mappa aperta.
12. Il teorema di Hahn-Banach in versione reale.
13. Il teorema di Hahn-Banach nella versione con invarianza rispetto a una famiglia di trasformazioni.