Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Spazi di Hilbert, serie di Fourier, spazi di Banach

Teoria elementare degli spazi di Hilbert. Definizione di prodotto interno in uno spazio vettoriale sui complessi. Prime conseguenze. La norma indotta da un prodotto scalare. La disuguaglianza di Schwarz. La disuguaglianza triangolare. Spazi di Hilbert. Esempi: $\mathbb{C}^n, L^2$. Continuità del prodotto scalare rispetto a ciascuna delle componenti, e continuità della norma. Insiemi convessi in uno spazio vettoriale. L'identità del parallelogrammo. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Cosa succede se la norma non deriva da un prodotto scalare. Riscrittura della condizione di minima distanza in termini di prodotto scalare: il caso di un convesso e il caso di un sottospazio affine. Il caso di un sottospazio vettoriale. Ortogonalità. L'ortogonale a un insieme di vettori è sempre un sottospazio vettoriale chiuso. La decomposizione in somma diretta fra un sottospazio chiuso e il suo ortogonale, e la proiezione ortogonale associata. *In uno spazio normato se aggiungiamo un vettore a un sottospazio chiuso otteniamo un sottospazio ancora chiuso.* I sottospazi a dimensione finita sono sempre chiusi. Il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert come prodotti scalari con vettori costanti.

Sistemi ortonormali. Sistemi di vettori ortogonali e ortonormali. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio generato da un sistema ortonormale finito. Il problema della generalizzazione alla proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortogonale qualsiasi. Richiami sulle somme infinite di numeri reali. La somma della serie come limite delle somme parziali. Convergenza assoluta. Le serie numeriche che convergono non assolutamente non godono della proprietà commutativa, cioè rimescolando i termini si possono far tendere a qualsiasi cosa (cenno). Somme infinite di numeri reali non negativi: l'approccio con le somme parziali, quello con l'estremo superiore di tutte le possibili sotto-somme finite, quello con l'integrale rispetto alla misura del conteggio. Definizione di sommabilità nel caso vettoriale. Definizione di condizione di Cauchy per la sommabilità di vettori. La sommabilità implica la condizione di Cauchy. Se vale la condizione di Cauchy, l'insieme degli indici con vettore non nullo è al più numerabile. Se lo spazio normato è completo, la condizione di Cauchy implica la sommabilità. Nel caso particolare che lo spazio normato sia $\mathbb{R}$ e tutti i vettori siano ≥ 0 la sommabilità coincide con tutti gli altri approcci alle somme infinite. In uno spazio normato a dimensione infinita la condizione di convergenza assoluta $\sum\|a_\lambda\| < +\infty$ implica la sommabilità, ma non viceversa. In uno spazio con prodotto scalare, se i vettori a_λ formano un sistema ortogonale, la somma $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ è di Cauchy se e solo se $\sum_{\lambda\in\Lambda}\|a_\lambda\|^2 < +\infty$. Un lemma che precisa alcune stime del teorema della minima distanza. *La formula generale per la proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale.* I coefficienti di Fourier $\hat{x}(\lambda)$ di un vettore x rispetto a un sistema ortonormale. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ va da H in $\ell^2(\Lambda)$, è lineare, continua e suriettiva. *Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.* Identità di Bessel e di Parseval. Spazi topologici separabili. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ed esistenza di basi hilbertiane per spazi di Hilbert separabili. Basi vettoriali di uno spazio vettoriale e loro inutilità nel caso di spazi normati completi. Il principio di massimalità di Hausdorff e l'esistenza di basi hilbertiane per un generico spazio di Hilbert. Due basi hilbertiane di uno stesso spazio hanno la stessa cardinalità (dimensione hilbertiana).

Serie di Fourier. Basi hilbertiane di $L^2(\mathbb{R})$: cenno alle ondine di Haar e al problema della compressione dei dati. Il cerchio unitario $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e l'esponenziale complesso $\varphi(t) := e^{it}$ mettono in corrispondenza le funzioni su $\mathbb{R}$ periodiche di periodo 2π con le funzioni su $\mathbb{U}$. Rassegna delle proprietà topologiche, metriche ed algebriche del cerchio unitario. Visualizzazione di funzioni sul cerchio unitario. La struttura di spazio di misura sul cerchio unitario con la misura angolare, e la sua normalizzazione. La misura angolare normalizzata. L'integrale nella lunghezza d'arco lungo il cerchio visto come curva parametrica. Il calcolo concreto di integrali sul cerchio. La base hilbertiana delle potenze $\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ di $L^2(\mathbb{U})$. Verifica dell'ortonormalità. Varianti della base hilbertiana delle potenze. Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra. Applicazione dell'identità di Bessel: la serie notevole $1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \cdots = \pi^2/8$. Il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier. Il prodotto di convoluzione di due funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: definizione, significato geometrico, condizioni sufficienti di esistenza. Uso della convoluzione per le medie mobili usando i nuclei regolarizzatori. Convoluzione di funzioni periodiche sui reali, o di funzioni sul cerchio unitario. Polinomi trigonometrici. Convolvendo una funzione con un polinomio trigonometrico si ottiene un polinomio trigonometrico. *Approssimazione uniforme di una funzione continua sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici ottenuti convolvendo con una successione di nuclei regolarizzatori. Esistenza di nuclei regolarizzatori con le proprietà richieste.* Densità dei polinomi trigonometrici nello spazio delle funzioni continue e in L^2. Somme parziali della serie di Fourier, e il problema della loro convergenza puntuale. Le somme parziali riscritte come convoluzione col nucleo di Dirichlet. Proprietà del nucleo di Dirichlet. Formule alternative per il nucleo di Dirichlet. *Il lemma di Riemann-Lebesgue.* I coefficienti di Fourier per una funzione di L^1 sono infinitesimi. *Il teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier in ipotesi tipo Lipschitz.* Rassegna di risultati sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier. *Calcolo della serie di Fourier dell'onda quadra* e dell'onda a dente di sega, con serie numeriche notevoli associate. Calcolo della serie di Fourier dell'onda di t^2, con serie numeriche notevoli associate. Illustrazioni sulle serie di Fourier.

I teoremi fondamentali degli spazi di Banach. Norme, spazi normati e spazi di Banach. Operatori lineari fra spazi normati. Norma operatoriale di un operatore. Un operatore lineare è continuo se e solo se la norma operatoriale è finita. Un operatore lineare è continuo se e solo se manda una (particolare) palla in un limitato. Esempi di operatori lineari continui o non continui fra spazi normati. Operatori lineari non continui fra spazi di Banach esistono solo invocando l'assioma di scelta. *Il teorema di Baire.* Cenno alla variante del teorema di Baire in spazi senza punti isolati. Insiemi magri. *Il teorema dell'uniforme limitatezza, o di Banach-Steinhaus.* Che cosa succede se si tralascia l'ipotesi che lo spazio di partenza sia completo, oppure se ci si restringe in dimensione finita. Applicazione alle serie di Fourier: esistono funzioni continue e periodiche per le quali le ridotte della serie di Fourier sono illimitate in un punto (prima parte). Esistono funzioni continue e periodiche per le quali le ridotte della serie di Fourier sono illimitate su tutti i punti razionali. *Il teorema della mappa aperta.* Il caso della mappa biiettiva. Il teorema del grafico chiuso. Il caso di dimensione finita. Cosa succede per spazi non completi. Applicazione alle serie di Fourier: esistono successioni x_n infinitesime per $n \to \pm\infty$ che non sono i coefficienti di Fourier di nessuna funzione $f \in L^1(0, 2\pi)$. *Il teorema di Hahn-Banach in versione reale.* Il teorema di Hahn-Banach complesso. Prime applicazioni. Interpretazione geometrica. *Il teorema di Hahn-Banach reale con invarianza.* Applicazione alla teoria della misura: sull'insieme dei sottinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ esiste una funzione non negativa, finitamente additiva e invariante per traslazioni che estende la misura di Lebesgue. Cenno alla dimensione 2 e al paradosso di Banach-Tarski in dimensione 3. Altre applicazioni del teorema di Hahn-Banach in spazi normati. La separazione di un convesso chiuso con parte interna non vuota da un punto della frontiera, in dimensione finita. Esempio di estensione non unica di un funzionale. Su L^∞ esistono funzionali lineari continui che non sono della forma $x \mapsto \int xy\, d\mu$ con $y \in L^1$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
2. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso si ottiene un sottospazio chiuso.
3. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.
4. Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.
5. L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio delle funzioni continue sul cerchio unitario, con la norma della convergenza uniforme.
6. La serie di Fourier dell'onda quadra.
7. Il lemma di Riemann-Lebesgue.
8. Il teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier.
9. Il teorema di Baire.
10. Il teorema di Banach-Steinhaus, o dell'uniforme limitatezza.
11. Il teorema della mappa aperta.
12. Il teorema di Hahn-Banach in versione reale.
13. Il teorema di Hahn-Banach nella versione con invarianza rispetto a una famiglia di trasformazioni.