Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2013/2014

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Spazi di Hilbert, serie di Fourier, spazi di Banach

Teoria elementare degli spazi di Hilbert. Definizione di prodotto interno in uno spazio vettoriale sui complessi. Prime conseguenze. La norma indotta da un prodotto scalare. La disuguaglianza di Schwarz. La disuguaglianza triangolare. Spazi di Hilbert. Esempi: $\mathbb{C}^n, L^2$. Continuità del prodotto scalare rispetto a ciascuna delle componenti, e continuità della norma. Sottospazi vettoriali e sottospazi chiusi. Insiemi convessi in uno spazio vettoriale. Ortogonalità fra vettori. Ortogonale di un vettore o di un insieme di vettori. L'identità del parallelogrammo. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Caratterizzazione del punto di minima distanza in termini del prodotto scalare, nel caso generale di un convesso e nel caso speciale di un sottospazio vettoriale. Il teorema della decomposizione ortogonale di uno spazio di Hilbert dato un sottospazio chiuso. Proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso. *Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso di uno spazio normato si ottiene un sottospazio chiuso.* I sottospazi di dimensione finita di uno spazio normato sono sempre chiusi. Il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Confronto coi risultati noti su L^p.

Sistemi ortonormali. Come si trova esplicitamente la proiezione di un vettore sul sottospazio generato da un numero finito di vettori. Definizione di sistemi ortonormali di vettori. La formula della proiezione ortogonale di un vettore sul sottospazio generato da un sistema ortonormale finito. Il problema della generalizzazione a un sistema ortonormale infinito. Vari approcci alle somme infinite: limite delle somme parziali, serie condizionatamente convergenti, criterio della convergenza assoluta, $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha := \sup\{\sum_{\alpha\in F} a_\alpha \mid F$ sottinsieme finito di $A\}$ quando $a_\alpha \geq 0$, $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha := \int_A a\, d\#$ dove $\#$ è la misura che conta i punti. Cenno alla dimostrazione che la serie armonica a segni alterni $1-1/2+1/3-1/4+1/5-\cdots$ si può rimescolare in modo che le somme parziali tendano a un qualsiasi numero prefissato. La definizione di sommabilità per una famiglia indicizzata $\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ di vettori in uno spazio normato. La condizione di Cauchy per la sommabilità. La sommabilità implica la condizione di Cauchy. Se una famiglia di vettori è di Cauchy per la sommabilità, allora sono tutti nulli eccetto per un insieme al più numerabile di indici. In uno spazio completo la condizione di Cauchy è equivalente alla sommabilità. La condizione della convergenza totale $\sum_\lambda |x_\lambda| < +\infty$ implica la sommabilità, ma non viceversa (in dimensione infinita). Per un sistema ortogonale $\{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ in uno spazio di Hilbert, la sommabilità equivale alla condizione $\sum_{\lambda\in\Lambda} \|u_\lambda\|^2 < +\infty$. *La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.* I coefficienti di Fourier $\hat{x}(\lambda)$ di un vettore x rispetto a un sistema ortonormale $\{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ è lineare, continua e suriettiva $H \to \ell^2(\Lambda)$. *Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.* Generalità sulle basi hilbertiane, confrontate con le basi vettoriali. Come interpretare l'uguaglianza $x = \sum_\lambda \hat{x}(\lambda)u_\lambda$ nel caso che $H = L^2$. Le identità di Bessel e di Parseval.

Serie di Fourier. Basi hilbertiane di $L^2(\mathbb{R})$: cenno alle ondine di Haar. Funzioni periodiche su $\mathbb{R}$. Il cerchio unitario. Corrispondenza fra funzioni periodiche e funzioni sul cerchio unitario. Struttura di spazio di misura normalizzata sul cerchio unitario. Il sistema ortogonale formato dalle funzioni $z \mapsto z^n$ sul cerchio unitario, al variare di $n \in \mathbb{Z}$. Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra. L'integrale sul cerchio unitario visto come integrale di linea nel parametro di lunghezza d'arco. Simmetrie dell'integrale di funzioni periodiche: simmetria per traslazione e per riflessione. Simmetrie dell'integrale sul cerchi unitario: per rotazione e per coniugio. Prodotto di convoluzione $f * g$ di due funzioni su $\mathbb{R}$: vari casi in cui è ben definita. La convoluzione è commutativa: $f * g = g * f$. La convoluzione di due funzioni periodiche su $\mathbb{R}$. La convoluzione di due funzioni sul cerchio unitario. Generalità sulla convoluzione usata per approssimare funzioni con altre funzioni più regolari ("medie mobili"). Approssimazione uniforme di una funzione continua sul cerchio unitario tramite convoluzione con una successione di funzioni positive, di integrale 1 e che tendono a 0 uniformemente lontano dal punto 1. Polinomi trigonometrici. La convoluzione di una funzione di L^1 con un polinomio trigonometrico è ancora un polinomio trigonometrico. *L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nell'insieme delle funzioni continue sul cerchio unitario, con la norma della convergenza uniforme.* Il sistema delle funzioni z^n per $n \in \mathbb{Z}$ sul cerchio unitario è una base hilbertiana di L^2. Applicazione all'*onda quadra*: l'identità di Bessel e la serie notevole $1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \cdots = \pi^2/8$. Il problema della convergenza delle serie di Fourier nel senso di L^1 e puntuale. *Il lemma di Riemann-Lebesgue.* Corollario: i coefficienti di Fourier di una funzione di L^1 sono infinitesimi. Le somme parziali della serie di Fourier espresse come convoluzione con il nucleo di Dirichlet. Espressioni alternative del nucleo di Dirichlet. *Il teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier.* Esempi: *l'onda quadra*, l'onda a dente di sega, l'onda t^2. Serie numeriche notevoli derivanti dall'identità di Bessel e dalla convergenza puntuale delle serie di Fourier. Illustrazioni su funzioni periodiche e serie di Fourier. Cenno al fenomeno di Gibbs.

I teoremi fondamentali degli spazi di Banach. Generalità sugli spazi normati. Operatori lineari fra spazi normati: la norma operatoriale. Equivalenza fra continuità e finitezza della norma operatoriale. *Il teorema di Baire. Il teorema di Banach-Steinhaus, o dell'uniforme limitatezza. Il teorema della mappa aperta.* Corollario: continuità dell'inverso di un operatore lineare biiettivo e continuo. Il teorema del grafico chiuso. Contresempio al teorema dell'uniforme limitatezza se si toglie l'ipotesi di Banach. Esempio di operatore lineare non continuo fra spazi normati. Esempio di operatore lineare continuo e biiettivo fra due spazi normati, il cui inverso non è continuo. Applicazione del teorema dell'uniforme limitatezza: esistono funzioni periodiche continue la cui serie di Fourier in un punto non converge. Stima della norma L^1 del nucleo di Dirichlet. Esistono funzioni periodiche continue per le quali l'insieme dei punti dove non c'è convergenza puntuale della serie di Fourier è denso e con la potenza del continuo. Applicazione del teorema della mappa aperta: esiste una successione $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ infinitesima che non è le successione dei coefficienti di Fourier di alcuna funzione di L^1 periodica. *Il teorema di Hahn-Banach in versione reale.* Applicazioni: un funzionale continuo definito su un sottospazio di uno spazio normato si può estendere a tutto lo spazio con la stessa norma operatoriale. Il teorema di Hahn-Banach in versione complessa. Applicazioni. Applicazione del teorema di Hahn-Banach alla separazione di un punto da un convesso in dimensione finita. Estensioni finitamente additive della misura di Lebesgue: esistenza tramite il teorema di Hahn-Banach. *Il teorema di Hahn-Banach nella versione con invarianza rispetto a una famiglia di trasformazioni.* Esistenza di misure finitamente additive e invarianti per traslazioni sulla retta. Esercizi.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
2. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso si ottiene un sottospazio chiuso.
3. La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso generato da un sistema ortonormale.
4. Basi hilbertiane e loro caratterizzazioni.
5. L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio delle funzioni continue sul cerchio unitario, con la norma della convergenza uniforme.
6. La serie di Fourier dell'onda quadra.
7. Il lemma di Riemann-Lebesgue.
8. Il teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier.
9. Il teorema di Baire.
10. Il teorema di Banach-Steinhaus, o dell'uniforme limitatezza.
11. Il teorema della mappa aperta.
12. Il teorema di Hahn-Banach in versione reale.
13. Il teorema di Hahn-Banach nella versione con invarianza rispetto a una famiglia di trasformazioni.