Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, II modulo
Analisi Matematica 6
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Alessandro Fonda, *Lezioni sulla teoria dell'integrale*, Edizioni Goliardiche, Trieste. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo VI. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli (o Analisi 5 e 6) può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

Integrazione in più dimensioni secondo Henstock-Kurzweil.

Definizione di integrabilità su rettangoli. Rettangoli in $\mathbb{R}^N$, volume di un rettangolo, suddivisioni a griglia e non a griglia. Somme di Riemann, calibri, suddivisioni marcate adattate a un calibro. *Esempio di un calibro che non ammette suddivisioni adattate a griglia.* Definizione di integrabilità e di integrale su un rettangolo. Elenco delle proprietà dell'integrale che si estendono da una a più dimensioni senza cambiamenti sostanziali. Definizione di integrabilità e integrale su un insieme limitato, in termini di integrabilità su rettangoli contenenti l'insieme. Una funzione che sia nulla su un rettangolo eccetto al più su un lato è integrabile con integrale nullo. La definizione di integrale su un insieme limitato non dipende dalla scelta del rettangolo contenente. Prime proprietà dell'integrale su un insieme limitato. Esempio di una funzione integrabile su un intervallo ma non su un sottinsieme.

Insiemi misurabili secondo Lebesgue. Definizione di misurabilità e misura secondo Lebesgue di un insieme limitato. Misura dell'insieme vuoto e dei rettangoli. Comportamento di misurabilità e misura per complementi, unioni finite e intersezioni finite. Additività e sub-additività numerabile della misura. Intersezioni numerabili di insiemi misurabili sono misurabili. Gli aperti limitati sono misurabili. I chiusi limitati sono misurabili. *La disuguaglianza di Čebičëv.* Le contrimmagini di intervalli tramite funzioni integrabili positive sono misurabili. Insiemi trascurabili. Una funzione quasi ovunque nulla è integrabile con integrale nullo. Una funzione integrabile positiva con integrale nullo è quasi ovunque nulla. Definizione di integrabilità e integrale per funzioni definite quasi ovunque. *Lemma del ricoprimento numerabile non sovrapposto adattato a un calibro assegnato. Caratterizzazione della misurabilità in termini di ricoprimenti con successioni di rettangoli.* Caratterizzazione degli insiemi trascurabili.

Integrali su rettangoli e integrali iterati. *Una funzione continua su un compatto di $\mathbb{R}^n$ è ivi integrabile.* Una funzione di L^1 su un limitato di $\mathbb{R}^n$ è integrabile su ogni sottinsieme misurabile. Additività numerabile dell'integrale di una funzione di L^1. Esistenza di suddivisioni "colonnari" adattate a un dato calibro su un rettangolo. *Una funzione integrabile su un rettangolo ha quasi tutte le sezioni integrabili. Teorema di Fubini.* Integrali iterati. Criterio necessario per l'integrabilità su un rettangolo: uguaglianza degli integrali iterati. Esempi di funzioni integrabili e non integrabili su un rettangolo. Sezioni orizzontali e verticali di un insieme. Teorema di Fubini per integrali su insiemi non rettangolari. Misura di un insieme come integrale delle misure delle sezioni.

Cambio di variabile per diffeomorfismi. Lemma: un diffeomorfismo manda le facce dei rettangoli in insiemi trascurabili. *Teorema del cambio di variabile negli integrali multidimensionali, nel caso di una funzione continua su un compatto.* Esempio di applicazione della formula di cambio di variabile. *Un diffeomorfismo manda misurabili limitati in misurabili, con la formula integrale della misura dell'immagine.* Relazione fra integrale e misura del sottografico per funzioni positive. *Teorema del cambiamento di variabile per funzioni di L^1 su un limitato.* Trasformazioni notevoli: traslazioni, isometrie, trasformazioni isocòre, coordinate polari nel piano, coordinate cilindriche nello spazio.

Integrale su insiemi non limitati. Integrale di una funzione su un insieme non limitato. Misurabilità e misura di un insieme non limitato. Estensione al caso non limitato del teorema della convergenza monotona, di integrazione per serie positiva, della convergenza monotona, dell'additività numerabile dell'integrale, del teorema di Fubini, del cambiamento di variabili.

Insiemi patologici per la misura. *Un sottinsieme limitato di $\mathbb{R}$ che non è misurabile (insieme di Vitali).* Un sottinsieme limitato del piano le cui sezioni sono tutte misurabili ma che non è misurabile. Cenno al paradosso di Banach-Tarski.

Esercizi sugli integrali multipli. Calcolo dell'integrale della gaussiana usando gli integrali doppi e il cambio di variabile. Esercizi sul calcolo di integrali doppi su insiemi non limitati. Variabili aleatorie gaussiane in più dimensioni: calcolo degli integrali multipli coinvolti nella formula della densità, valor medio e matrice di varianza-covarianza. Matrice di varianza-covarianza di una variabile gaussiana multidimensionale (continuazione). *Dimostrazione della formula che lega le funzioni Beta e Gamma.* Dimostrazione della formula degli integrali di Fresnel.

Funzioni semi-integrabili e funzioni misurabili. Funzioni semi-integrabili, definite come inviluppo di una successione crescente di funzioni integrabili. La definizione di integrale per funzioni semi-integrabili è ben posta. *Il teorema della convergenza monotona per le funzioni semi-integrabili.* Funzioni misurabili a valori in uno spazio topologico. Definizioni equivalenti di funzioni misurabili a valori reali estesi. Per funzioni positive la misurabilità equivale alla semi-integrabilità. Stabilità della classe delle funzioni misurabili rispetto alla composizione con funzioni continue. Somma e prodotto di funzioni misurabili reali è misurabile. Teorema di Tonelli sull'integrale di una funzione positiva su un rettangolo (senza dimostrazione). Integrazione per serie di funzioni semiintegrabili. Integrazione per serie nel caso in cui la somma delle norme in L^1 è finita. Successioni a variazione limitata in uno spazio metrico. Le successioni di Cauchy hanno sempre una sottosuccessione a variazione limitata. Caratterizzazione della completezza di uno spazio metrico in termini di successioni a variazione limitata. Completezza di L^1.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Esempio di un calibro che non ammette suddivisioni adattate a griglia.
2. La disuguaglianza di Čebicëv.
3. Lemma del ricoprimento numerabile non sovrapposto adattato a un calibro assegnato.
4. Caratterizzazione della misurabilità in termini di ricoprimenti con successioni di rettangoli.
5. Una funzione continua su un compatto di $\mathbb{R}^n$ è ivi integrabile.
6. Una funzione integrabile su un rettangolo ha quasi tutte le sezioni integrabili.
7. Teorema di Fubini.
8. Teorema del cambio di variabile negli integrali multidimensionali, nel caso di una funzione continua su un compatto.
9. Un diffeomorfismo manda misurabili limitati in misurabili, con la formula integrale della misura dell'immagine.
10. Un sottinsieme limitato di $\mathbb{R}$ che non è misurabile (insieme di Vitali).
11. Dimostrazione della formula che lega le funzioni Beta e Gamma.
12. Il teorema della convergenza monotona per le funzioni semi-integrabili.