Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo
Programma

Prof. GIANLUCA GORNI

Testi di riferimento: WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). GIUSEPPE DE MARCO, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Integrali dipendenti da un parametro

De Marco VII.5, VI.1-2.

Un esempio di un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Integrali dipendenti da parametro: caso compatto. Esempio di studio di una funzione definita come un integrale dipendente da parametro (caso compatto). *Calcolo dell'integrale della gaussiana usando gli integrali dipendenti da parametro.* Esempi di integrali impropri dipendenti da parametro in cui manca la continuità o la derivabilità. Un teorema di regolarità per gli integrali dipendenti da parametro (caso generale). Un esempio di studio di un integrale improprio dipendente da parametro. Richiami ed esercizi sulla convergenza di integrali impropri. La funzione Gamma di Eulero-Legendre. La funzione Beta. Esercizio sugli integrali dipendenti da parametro. Integrale di Laplace.

2. Misure prodotto

Rudin cap. 7. De Marco VII.6, VIII.4

Sigma-algebre prodotto. Prodotto cartesiano di spazi misurabili: rettangoli misurabili, σ-algebra prodotto, insiemi elementari, sezioni di un insieme, classi monotone.

Tutte le sezioni di un insieme di $S \otimes \mathcal{T}$ sono misurabili (rispetto alle relative σ-algebre). *La σ-algebra prodotto coincide con la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari.* Sezioni di funzioni sullo spazio prodotto e misurabili rispetto alla σ-algebra prodotto.

Misure prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. *Teorema di esistenza della misura prodotto di due misure σ-finite.* Esempi in cui viene meno la tesi del teorema precedente. *Teorema di Fubini-Tonelli.* Esempi di funzioni di due variabili reali con integrali iterati diversi.

Misure di Lebesgue in più dimensioni. Se $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ è lo spazio di misura di Lebesgue in una dimensione, lo spazio di misura $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}, \lambda \otimes \lambda)$ non è completo. Se $\mathcal{B}_n$ è la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$ (dimostrazione per $n = m = 1$). Teorema della misura di Lebesgue k-dimensionale. Comportamento della misura di Lebesgue rispetto alle trasformazioni lineari. *Formula del cambio di variabili lineare negli integrali di Lebesgue.* Formula del cambiamento di variabile diffeomorfismo (senza dimostrazione).

Calcolo di integrali multipli. Integrali in coordinate polari (senza dimostrazione). Calcolo alternativo dell'integrale della gaussiana usando le coordinate polari. Integrale del prodotto tensoriale di funzioni. Esercizi sugli integrali multipli. La densità di una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale e il suo integrale. Calcolo della media e della matrice di varianza-covarianza di una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale. *Dimostrazione della formula che lega le funzioni Gamma e Beta: $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$.* Calcolo degli integrali di Fresnel $\int_0^\infty \operatorname{sen} t^2\,dt$, $\int_0^\infty \cos t^2\,dt$ usando il teorema di Fubini-Tonelli e il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

3. Spazi L^p

Rudin, cap. 3

Disuguaglianze di convessità. Richiami sulle funzioni convesse di una variabile reale: definizioni alternative, continuità e derivabilità a sinistra e a destra all'interno del dominio, posizione rispetto alla retta tangente. Criteri di convessità in termini di derivate prime o seconde. *Disuguaglianza di Jensen.* Disuguaglianze fra medie geometriche e medie aritmetiche (pesate). Disuguaglianza di Young. Esponenti coniugati. *Disuguaglianza di Hölder. Disuguaglianza di Minkowski.* Condizione per avere l'uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder.

Spazi L^p. Definizione di norma $\|\cdot\|_p$ per $1 \le p < +\infty$ e di spazio L^p. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di funzioni misurabili reali. Definizione di norma $\|\cdot\|_\infty$ e di spazio L^∞. Caso speciale di $\ell^p(X)$, in cui X è numerabile con la misura del conteggio. Caso speciale in cui X ha solo due punti, con la misura del conteggio: norme L^p in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}^2$, e confronto delle palle unitarie nelle varie norme. La disuguaglianza di Hölder in termini di norme L^p. *Se $1 \le p < +\infty$ e $\sum \|f_n\|_p < +\infty$ allora la serie $\sum f_n$ converge quasi ovunque e in L^p.* Successioni a variazione limitata in uno spazio metrico. Una successione di Cauchy ammette una sottosuccessione a variazione limitata. Completezza di uno spazio metrico in termini di convergenza delle successioni a variazione limitata. *Gli spazi L^p sono completi per* $1 \le p \le +\infty$. Sottospazi densi notevoli di L^p per $1 \le p < +\infty$: l'insieme delle funzioni semplici misurabili, nulle al di fuori di un insieme di misura finita. *Teorema di Lusin.* Densità dell'insieme delle funzioni continue a supporto compatto in L^p. Esercizi sugli spazi L^p.

4. Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Rudin, cap. 4, De Marco, cap. II.18

Spazi di Hilbert. Spazi con prodotto scalare. Disuguaglianza di Schwarz. Norma indotta dal prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Esempi. Identità del parallelogrammo. Insiemi convessi. *Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Ortogonalità. Uno spazio di Hilbert si spezza in somma diretta di un sottospazio chiuso col suo ortogonale. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso di uno spazio normato si ottiene un sottospazio chiuso. I sottospazi di dimensione finita sono chiusi. La proiezione di un vettore su un sottospazio a dimensione finita: caso generale e formula nel caso di base ortonormale.

Somme infinite di vettori e basi hilbertiane. Sistemi ortonormali di vettori in uno spazio di Hilbert. Somme infinite in spazi normati: definizione di sommabilità e condizione di Cauchy (senza dimostrazione). *Formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale.* Disuguaglianza di Bessel. I coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortonormale. L'applicazione che associa il vettore x dello spazio di Hilbert con il sistema $\hat{x}$ dei suoi coefficienti di Fourier manda H in ℓ^2 ed è lineare e continua. *Teorema di Riesz-Fischer.* Definizione e caratterizzazione delle basi hilbertiane. Identità di Bessel e di Parseval. Esistenza di basi hilbertiane di un arbitrario spazio di Hilbert (senza dimostrazione).

Serie di Fourier. Come introdurre sul cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ una misura boreliana normalizzata e invariante per rotazioni. Lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{U})$. Se $u_n(z) := z^n$, l'insieme $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale in $L^2(\mathbb{U})$. Convoluzione di due funzioni di $L^2(\mathbb{U})$. Polinomi trigonometrici. *Ogni funzione continua su $\mathbb{U}$ è approssimabile uniformemente con una successione di polinomi trigonometrici.* Il sistema $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$. Serie di Fourier in $L^2(\mathbb{U})$: convergenza nel senso delle somme infinite in $L^2(\mathbb{U})$, somme parziali e cenni alla loro convergenza puntuale. Esempi: *serie di Fourier dell'onda quadra e dell'onda a dente di sega.* La formula $\pi^2/6 = \sum 1/n^2$ ottenuta dall'identità di Bessel, e cenni alla sua storia.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti durante l'orale.

1. Calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ usando gli integrali dipendenti da un parametro.
2. La σ-algebra prodotto coincide con la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari.
3. Teorema di esistenza della misura prodotto di due misure σ-finite
4. Teorema di Fubini-Tonelli.
5. Formula del cambio di variabili lineare negli integrali di Lebesgue.
6. Dimostrazione della formula che esprime la funzione Beta in termini della funzione Gamma.
7. Disuguaglianza di Jensen.
8. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
9. Se $\sum_n \|f_n\|_p < +\infty$ allora la serie $\sum_n f_n$ converge quasi ovunque e in L^p e completezza degli spazi L^p.
10. Teorema di Lusin.
11. Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
12. Formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale
13. Teorema di Riesz-Fischer.
14. Approssimazione uniforme di funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici.
15. Serie di Fourier dell'onda quadra e dell'onda a dente di sega.