Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Misure prodotto

Rudin cap. 7. De Marco VII.6, VIII.4

Sigma-algebre prodotto. Prodotto cartesiano di spazi misurabili: rettangoli misurabili, σ-algebra prodotto, insiemi elementari, sezioni di un insieme, classi monotone. Tutte le sezioni di un insieme di $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ sono misurabili (rispetto alle relative σ-algebre). *La σ-algebra prodotto coincide con la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari.* Sezioni di funzioni sullo spazio prodotto e misurabili rispetto alla σ-algebra prodotto.

Misure prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. *Teorema di esistenza della misura prodotto di due misure σ-finite.* Esempi in cui viene meno la tesi del teorema precedente. *Teorema di Fubini-Tonelli.* Esempi di funzioni di due variabili reali con integrali iterati diversi.

Misure di Lebesgue in più dimensioni. Se $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ è lo spazio di misura di Lebesgue in una dimensione, lo spazio di misura $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}, \lambda \otimes \lambda)$ non è completo. Se $\mathcal{B}_n$ è la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$. Teorema della misura di Lebesgue k-dimensionale. Comportamento della misura di Lebesgue rispetto alle trasformazioni lineari. *Formula del cambio di variabili lineare negli integrali di Lebesgue.* Cenno al paradosso di Banach-Tarski.

Calcolo di integrali multipli. Integrale del prodotto tensoriale di funzioni. Esercizi sugli integrali multipli. La densità di una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale e il suo integrale. Calcolo della media e della matrice di varianza-covarianza di una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale. *Dimostrazione della formula che lega le funzioni Gamma e Beta:* $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$. Calcolo degli integrali di Fresnel $\int_0^\infty \operatorname{sen} t^2\,dt$, $\int_0^\infty \cos t^2\,dt$ usando il teorema di Fubini-Tonelli e il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Esistenza del limite di $\int_\pi^a f(x)\operatorname{sen} x\,dx$ per $a \to +\infty$ e finitezza (o meno) di $\int_\pi^\infty |f(x)\operatorname{sen} x|\,dx$ quando f è positiva, decrescente e infinitesima.

2. Spazi L^p

Rudin, cap. 2 e 3

Disuguaglianze di convessità. Definizione di funzione convessa di una variabile. Significato geometrico. Definizione alternativa in termini di rapporti incrementali. Derivabilità destra e sinistra delle funzioni convesse. Le funzioni convesse sono continue all'interno dell'intervallo di definizione. Il grafico di una funzione convessa si trova al di sopra di ogni retta tangente. Caratterizzazione della convessità in termini di derivate prime e seconde. *Disuguaglianza di Jensen.* Conseguenze: disuguaglianze fra medie geometriche e aritmetiche pesate e non. Disuguaglianza di Young usando la convessità e per via geometrica. *Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Condizioni per avere l'uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder.

Spazi L^p. Definizione di norma $\|\cdot\|_p$ e di spazio $L^p(\mu)$. Estremo superiore essenziale di una funzione misurabile a valori reali estesi. La norma $\|\cdot\|_\infty$ e lo spazio $L^\infty(\mu)$. Riscrittura delle disuguaglianze di Hölder e di Minkowski in termini di norme L^p. Esempi di calcolo dell'estremo superiore essenziale. Esempi di funzioni che appartengono ad L^p per alcuni p ma non per altri. *Se $\sum_n \|f_n\|_p < +\infty$ allora la serie $\sum_n f_n$ converge quasi ovunque e in L^p. Completezza degli spazi L^p.*

Sottospazi densi notevoli. L'insieme delle funzioni semplici e nulle fuori da un insieme di misura finita è denso in L^p per ogni $p \in [1, +\infty[$. *Il teorema di Lusin.* L'insieme delle funzioni continue a supporto compatto è denso in $L^p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$.

Esercizi. La funzione $p \mapsto \ln \int |f|^p$ è convessa e continua. Se $\mu(X) = 1$ allora $p \mapsto \|f\|_p$ è crescente. Se $f \in L^p$ per almeno un $p < +\infty$ allora $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ per $p \to +\infty$. La disuguaglianza di Hardy.

3. Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Rudin, cap. 4, De Marco, cap. II.18, cap. VI.3, VI.5–7

Spazi di Hilbert. Spazi vettoriali con prodotto scalare: assiomi e prime proprietà. Disuguaglianza di Schwarz e disuguaglianza triangolare. La norma indotta dal prodotto scalare e gli spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert. Identità del parallelogrammo e suo significato geometrico. La norma $\|\cdot\|_p$ su $\mathbb{R}^2$ deriva da un prodotto scalare soltanto per $p = 2$. Continuità del prodotto scalare e della norma. Insiemi convessi. Ortogonalità. *Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso.* Uno spazio di Hilbert è somma diretta di un sottospazio vettoriale chiuso col suo ortogonale. Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale chiuso. *Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert*. In uno spazio normato il sottospazio generato aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso è ancora chiuso. In uno spazio normato i sottospazi di dimensione finita sono chiusi. Come si trova la proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio di Hilbert su un sottospazio a dimensione finita con base ortonormale assegnata.

Somme infinite di vettori e basi hilbertiane. Somme infinite di vettori in spazi normati: definizione di sommabilità e di condizione di Cauchy. Una somma sommabile ha risultato unico e l'insieme degli indici per i quali il vettore è non nullo è al più numerabile. Relazione fra sommabilità e condizione di Cauchy. Confronto fra le diverse nozioni di somma infinita nel caso scalare. Se $\sum \|x_\lambda\|$ è sommabile, allora anche $\sum x_\lambda$ è sommabile, ma in dimensione infinita non vale il viceversa. Dimostrazione della formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale. Disuguaglianza di Bessel. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortonormale $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$. Teorema di Riesz-Fischer: l'applicazione che porta il vettore x nella famiglia dei coefficienti di Fourier $\hat{x}(\alpha) := (x \mid u_\alpha)$ è lineare, continua e suriettiva da H in $\ell^2(A)$. Definizione di sistema ortogonale massimale (base hilbertiana). *Caratterizzazioni dei sistemi ortonormali massimali*, con le identità di Bessel e di Parseval. Principio di massimalità di Hausdorff e dimostrazione dell'esistenza di basi hilbertiane. Basi hilbertiane di $L^2(\mathbb{R})$: cenno alle ondine di Haar.

Serie di Fourier. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$, l'esponenziale complesso e la misura indotta su $\mathbb{U}$. Proprietà dell'integrale di funzioni periodiche sulla retta reale. Invarianza per rotazioni. Il sistema ortonormale $u_n(z) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Convoluzione di due funzioni continue su $\mathbb{U}$. Polinomi trigonometrici. *Ogni funzione continua su $\mathbb{U}$ può essere approssimata uniformemente con una successione di polinomi trigonometrici.* Dimostrazione che $\{u_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ è una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$. La serie di Fourier di una funzione di $L^2(\mathbb{U})$ e il senso della sua convergenza in $L^2(\mathbb{U})$. Il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier. *Il lemma di Riemann-Lebesgue.* L'insieme delle funzioni a gradino su $\mathbb{R}$ è densa in $L^1(\mathbb{R})$. I coefficienti di Fourier delle funzioni di $L^2(\mathbb{U})$ (e anche delle funzioni di $L^1(\mathbb{U})$ sono infinitesimi per $n \to \pm\infty$. Il nucleo di Dirichlet. *Il teorema di convergenza puntale delle serie di Fourier in ipotesi tipo Lipschitz.* Esempi di calcolo di serie di Fourier: l'onda quadra, l'onda a dente di sega, e la funzione $t \mapsto t^2$ prolungata per periodicità fuori da $[-\pi, \pi]$, con serie notevoli che ne derivano.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti durante l'orale.

1. La σ-algebra prodotto coincide con la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari
2. Teorema di esistenza della misura prodotto di due misure σ-finite
3. Teorema di Fubini-Tonelli.
4. Formula del cambio di variabili lineare negli integrali di Lebesgue.
5. Dimostrazione della formula che esprime la funzione Beta in termini della funzione Gamma.
6. Disuguaglianza di Jensen.
7. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
8. Se $\sum_n \|f_n\|_p < +\infty$ allora la serie $\sum_n f_n$ converge quasi ovunque e in L^p e completezza degli spazi L^p.
9. Teorema di Lusin.
10. Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
11. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert.
12. Teorema di caratterizzazione delle basi hilbertiane.
13. Approssimazione uniforme di funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici.
14. Lemma di Riemann-Lebesgue.
15. Teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier in ipotesi "tipo Lipschitz".