Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/02

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, II Modulo

Prova Scritta del 9 gennaio 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, e poniamo $\varphi(p) := \|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ per $1 \le p < +\infty$. Sia $A := \{p \,:\, \varphi(p) < +\infty\}$.

a. Dimostrare che A è un intervallo, cioè che se p_1, p_2 sono due punti di A e q è compreso fra p_1 e p_2, allora anche $q \in A$.
(Disuguaglianza di Hölder).

b. Dimostrare che φ è continua su A.
(Se per caso $|f|$ è sempre ≤ 1, oppure sempre > 1, si può applicare la convergenza dominata... Nel caso generale si può spezzare l'integrale...).

2. Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$F(x) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z - z^2}(2 + x - x\sqrt{z})^2} dt\,.$$

a. Per quali x la $F(x)$ è ben definita e finita?

b. Dimostrare che la $F(x)$ è continua e derivabile per $x > -1$.

Punti: 10+15, 15+15.