Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta dell'8 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Per $x > 0$ definiamo

$$F(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \dfrac{t^2}{x}\right)^x} .$$

a. Trovare l'insieme D degli $x > 0$ per i quali $F(x)$ è ben definito e finito. Dimostrare che F è continua su D, e trovare i limiti di F nei punti di frontiera di D.

b. Dimostrare (per esempio con un cambio di variabile) che

$$F(x) = \sqrt{x} \cdot B\Big(\frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\Big),$$

dove $B(p, q) := \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{p-1} du$ è la funzione Beta di Eulero.

c. Mostrare che F è una funzione di classe C^∞ su D, che vale la relazione

$$F(x+1) = F(x) \frac{2x-1}{2x} \sqrt{\frac{1+x}{x}},$$

e dare una formula esplicita per $F(n)$ con $n \in \mathbb{N}$.

(Si possono usare le proprietà note della funzione Beta e Gamma).

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non quasi ovunque nulla. Per $1 \leq p < +\infty$ sia $\|f\|_p$ la norma di f in $L^p(\mu)$. Dimostrare che la funzione $p \mapsto p \ln\|f\|_p$ è convessa dove ha valori finiti.

(Disuguaglianza di Hölder).

Punti: 10+10+10, 10.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

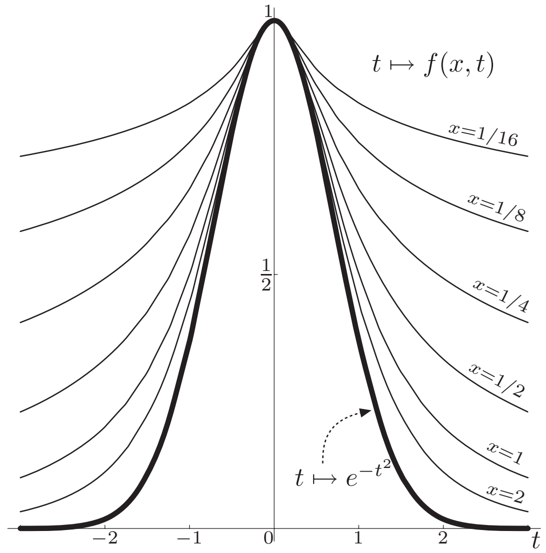
Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta dell'8 marzo 2002

Svolgimento

1. a. La funzione

$$f(x,t) := \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{x}\right)^x}$$



è ben definita, continua e positiva per $(x,t) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Quindi la

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt$$

è ben definita come funzione da $]0,+\infty[$ a $[0,+\infty]$. Per trovare quando $F(x)$ è finita si guarda il comportamento asintotico di $f(x,t)$ per $t \to \pm\infty$:

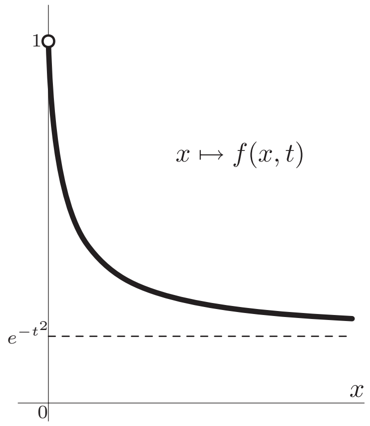
$$f(x,t) = \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} = \frac{t^{-2x}}{x^{-x}}\Big(\underbrace{\frac{x}{t^2}+1}_{\to 1}\Big)^{-x} \sim \frac{1}{t^{2x}}\,.$$

Confrontando con le funzioni campione $1/t^\alpha$, otteniamo che $F(x) < +\infty$ quando $2x > 1$, cioè quando $x > 1/2$.
Il limite di $F(x)$ per $x \to 1/2$ da destra si può ricavare dal lemma di Fatou:

$$+\infty = F(1/2) = \int_{\mathbb{R}} f(1/2,t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\Big(\lim_{x\to(1/2)^+} f(x,t)\Big)dt = \int_{\mathbb{R}}\Big(\min\lim_{x\to(1/2)^+} f(x,t)\Big)dt \le$$
$$\le \min\lim_{x\to(1/2)^+}\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt = \min\lim_{x\to(1/2)^+} F(x) \le \max\lim_{x\to(1/2)^+} F(x)\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to(1/2)^+} F(x) = +\infty\,.$$



Il limite di $F(x)$ per $x \to +\infty$ e la continuità su $]1/2,+\infty[$ richiede una qualche stima di $f(x,t)$ uniforme in x. La funzione $x \mapsto f(x,t)$ è decrescente per ogni t fissato. Studiamo infatti la derivata del logaritmo del denominatore:

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^x = \frac{\partial}{\partial x}x\log\left(1+\frac{t^2}{x}\right) =$$
$$= \log\left(1+\frac{t^2}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{t^2}{x}}\cdot\left(-\frac{t^2}{x^2}\right) =$$
$$= \log\left(1+\frac{t^2}{x}\right) - \frac{\frac{t^2}{x}}{1+\frac{t^2}{x}} = \varphi(t^2/x)\,,$$

dove

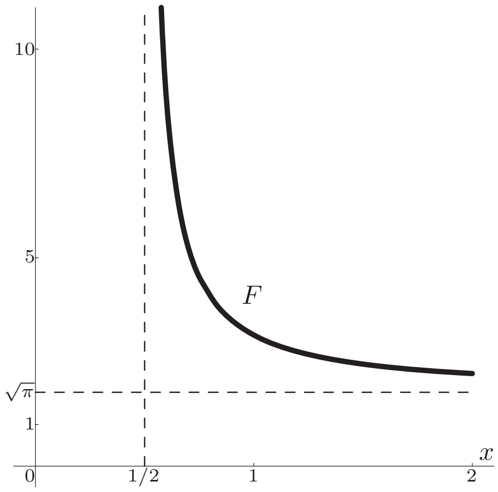
$$\varphi(y) := \log(1+y) - \frac{y}{1+y}\,.$$

Quest'ultima funzione $\varphi(y)$ è positiva per $y \geq 0$, come si vede dal valore in 0 e dal segno della derivata:

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{1+y-y}{(1+y)^2} = \frac{y}{(1+y)^2} \geq 0 \quad \text{per } y \geq 0\,.$$

Se ora $x \geq M > 1/2$ possiamo maggiorare $f(x,t)$ con $f(M,t)$:

$$\sup_{x \geq M} \big|f(x,t)\big| = \big|f(M,t)\big|, \qquad \text{e si ha che } \int_{\mathbb{R}} \big|f(M,t)\big| dt = F(M) < +\infty\,.$$



Ricordando che $f(x,t)$ è continua rispetto a x, ricaviamo che $F(x)$ è continua su $[M+\infty[$. Valendo questo per ogni $M > 1/2$ deduciamo che F è continua su $]1/2, +\infty[$. Possiamo poi anche passare al limite per $x \to +\infty$ con la convergenza dominata:

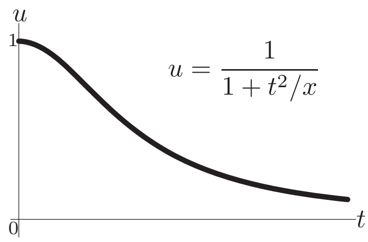
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_{x\to+\infty} f(x,t)\Big) dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_{x\to+\infty} \exp\big(-x \underbrace{\log(1+t^2/x)}_{=t^2/x+o(1/x)}\big)\Big)\, dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}\,.
\end{aligned}$$

Modo alternativo. Se in partenza facciamo il cambio di variabile lineare $u = t/\sqrt{x}$ viene

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+u^2)^x} \cdot \sqrt{x}\, du = \sqrt{x} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(1+u^2)^x}\,.$$

Il nuovo integrando si vede ad occhio che è decrescente rispetto a x. I conti precedenti (dominio, continuità, limite per $x \to 1/2$) sono più facili in questa versione, eccetto il limite per $x \to +\infty$, che si presenta in forma indeterminata.

b. Un cambio di variabile che porta direttamente alla formula principale della funzione Beta è



$$u = \frac{1}{1+\frac{t^2}{x}}\,, \qquad t = \sqrt{x\Big(\frac{1}{u}-1\Big)}\,,$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x\Big(\dfrac{1}{u}-1\Big)}}\Big(-\frac{x}{u^2}\Big)du = -\frac{\sqrt{x}}{2u^2\sqrt{\dfrac{1-u}{u}}}du = -\frac{\sqrt{x}}{2u^{3/2}\sqrt{1-u}}du\,.$$

Però questo cambio non è iniettivo rispetto a t sull'intervallo di integrazione. Per applicarlo bisogna prima ricondursi, grazie alla simmetria, a un integrale su $[0,+\infty[$, dove il cambio è iniettivo:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\Big(1+\dfrac{t^2}{x}\Big)^x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\Big(1+\dfrac{t^2}{x}\Big)^x} = 2\int_1^0 u^x \Big(-\frac{\sqrt{x}}{2u^{3/2}\sqrt{1-u}}\Big)du = \\
&= \sqrt{x}\int_0^1 u^{x-3/2}(1-u)^{-1/2}du = \sqrt{x}\int_0^1 u^{x-1/2-1}(1-u)^{1/2-1}du = \sqrt{x}B\Big(x-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Se si faceva il cambio di variabile più semplice $u = t^2/x$, $t = \sqrt{ux}$, $dt = \sqrt{x/u}du/2$, veniva

$$F(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\dfrac{t^2}{x}\right)^x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{u}}du = \sqrt{x}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/2-1}}{(1+u)^{1/2+(x-1/2)}}du\,,$$

che rientra in una delle formule alternative per la funzione Beta:

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du\,.$$

c. Ricordando la formula fondamentale che riporta la funzione Beta alla funzione Gamma

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,,$$

e il valore notevole $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, possiamo scrivere

$$F(x) = \sqrt{x}\cdot B\Big(x-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{x}\cdot\frac{\Gamma(x-1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(x-1/2+1/2)} = \frac{\Gamma(x-1/2)\sqrt{\pi x}}{\Gamma(x)}\,.$$

La funzione Γ è notoriamente di classe C^∞ su $]0,+\infty[$. Quindi anche F è di classe C^∞ su $]1/2,+\infty[$. I conti per la verifica della regolarità C^n direttamente sull'integrale che definisce la F sono proibitivi. Abbordabili sono invece quelli sulla forma alternativa

$$F(x) = \sqrt{x}\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(1+u^2)^x}\,,$$

dato che

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\Big(\frac{1}{(1+u^2)^x}\Big) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp\big(-x\log(1+u^2)\big) = \frac{\big(-\log(1+u^2)\big)^n}{(1+u^2)^x}\,,$$

e la dipendenza da x di quest'ultima espressione è facile.
Ricordando la formula $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}F(x+1) &= \frac{\Gamma(x+1-1/2)\sqrt{\pi x}}{\Gamma(x+1)} = \frac{(x-1/2)\Gamma(x-1/2)\sqrt{\pi(x+1)}}{x\Gamma(x)} = \\ &= \frac{x-1/2}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{\Gamma(x-1/2)\sqrt{\pi x}}{\Gamma(x)} = \frac{2x-1}{2x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot F(x)\,.\end{aligned}$$

Il valore di $F(1)$ si calcola per via simbolica:

$$F(1) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^1} = \big[\arctan t\big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi\,.$$

Usando la relazione ricorsiva

$$\begin{aligned}F(2) = F(1+1) &= \frac{2\cdot1-1}{2\cdot1}\sqrt{\frac{1+1}{1}}\cdot F(1) = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}\,,\\ F(3) = F(2+1) &= \frac{2\cdot2-1}{2\cdot2}\sqrt{\frac{2+1}{2}}\cdot F(2) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\pi\sqrt{2} = \frac{3\cdot1}{4\cdot2}\pi\sqrt{3}\,,\\ F(4) = F(3+1) &= \frac{2\cdot3-1}{3\cdot2}\sqrt{\frac{3+1}{3}}\cdot F(1) = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\pi\sqrt{3} = \frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\pi\sqrt{4}\,,\end{aligned}$$

Si intuisce la formula generale:

$$F(n) = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi\sqrt{n} \qquad \text{per } n \geq 2\,.$$

Si può dimostrare la formula per induzione: è vera per $n = 2$, e qualora sia vera per n abbiamo

$$F(n+1) = \frac{2n-1}{2n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot F(n) = \frac{2n-1}{2n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi\sqrt{n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi\sqrt{n+1}\,,$$

che è proprio la formula con $n+1$ al posto di n. Alla formula si poteva arrivare anche partendo dalle formule note della funzione Gamma sugli interi e i semiinteri:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \qquad \Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\,.$$

Infatti

$$F(n) = \frac{\Gamma(n-1/2)\sqrt{\pi n}}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n-1+1/2)\sqrt{\pi n}}{(n-1)!} = \frac{\frac{\left(2(n-1)-1\right)!!}{2^{n-1}}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi n}}{(n-1)!} = \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!2^{n-1}}\pi\sqrt{n}\,.$$

n	a_n
2	0,707107...
3	0,649519...
4	0,625
5	0,611425...
6	0,602804...
7	0,596844...
8	0,592478...
9	0,589142...
10	0,586509...

Osservando che

$$\begin{aligned}(n-1)!2^{n-1} &= \underbrace{\left((n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\right)}_{n-1\text{ fattori}}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdots 2\cdot 2)}_{n-1\text{ fattori}} = \\ &= (2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2 = (2n-2)!!\end{aligned}$$

si riottiene la formula di prima.
Curiosità: ricordando che $F(x) \to \sqrt{\pi}$ per $x \to +\infty$, si ricava che la successione

$$a_n := \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}$$

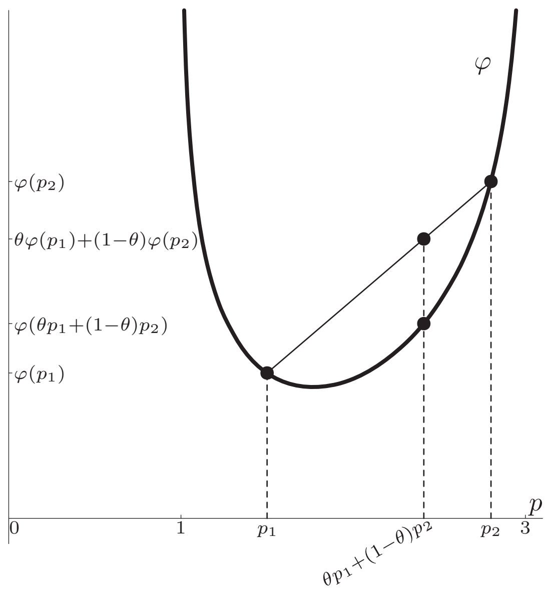
tende a $1/\sqrt{\pi} \approx 0{,}56419$ per $n \to +\infty$.

2. Poniamo

$$\begin{aligned}\varphi(p) &:= p\ln\|f\|_p = p\ln\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} = \\ &= \ln\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right).\end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\varphi\bigl(\theta p_1 + (1-\theta)p_2\bigr) \overset{?}{\leq} \theta\varphi(p_1) + (1-\theta)\varphi(p_2)\,.$$



(Per i curiosi, l'illustrazione qui accanto è un grafico di φ nel caso particolare $X = [1,+\infty[$, $f(x) = (x\sqrt{x-1})^{2/3}$; questa $\varphi(p)$ risulta finita per $1 < p < 3$). Siano $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$ due esponenti per i quali $\|f\|_p < +\infty$ e sia $\theta \in\,]0,1[$. La disuguaglianza da dimostrare si riscrive come

$$\begin{aligned}&\ln\left(\int_X |f|^{\theta p_1+(1-\theta)p_2}\,d\mu\right) \overset{?}{\leq} \\ &\overset{?}{\leq} \theta\left(\ln\int_X |f|^{p_1}\,d\mu\right) + (1-\theta)\ln\left(\int_X |f|^{p_2}\right) = \\ &= \ln\left(\int_X |f|^{p_1}\,d\mu\right)^{\theta} + \ln\left(\int_X |f|^{p_2}\right)^{1-\theta} = \ln\left(\left(\int_X |f|^{p_1}\,d\mu\right)^{\theta}\cdot\left(\int_X |f|^{p_2}\right)^{1-\theta}\right),\end{aligned}$$

cioè, togliendo i logaritmi,

$$\int_X |f|^{\theta p_1+(1-\theta)p_2}\,d\mu = \int_X |f|^{p_1\theta}|f|^{p_2(1-\theta)}\,d\mu \overset{?}{\leq} \left(\int_X |f|^{p_1}\,d\mu\right)^{\theta} \cdot \left(\int_X |f|^{p_2}\right)^{1-\theta}.$$

Questa formula ricorda la disuguaglianza di Hölder. In effetti se poniamo

$$p = \frac{1}{\theta}, \quad q = \frac{1}{1-\theta}$$

i due esponenti p, q sono > 1 e coniugati, e quindi possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned}\int_X |f|^{p_1\theta}|f|^{p_2(1-\theta)}\,d\mu &\overset{!}{\leq} \left(\int_X \left(|f|^{p_1\theta}\right)^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X \left(|f|^{p_2(1-\theta)}\right)^q d\mu\right)^{1/q} = \\ &= \left(\int_X \left(|f|^{p_1\theta}\right)^{1/\theta} d\mu\right)^{\theta} \cdot \left(\int_X \left(|f|^{p_2(1-\theta)}\right)^{1/(1-\theta)} d\mu\right)^{1-\theta} = \\ &= \left(\int_X |f|^{p_1}\,d\mu\right)^{\theta} \cdot \left(\int_X |f|^{p_2}\right)^{1-\theta},\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. La disuguaglianza di Hölder si usa in modo simile per dimostrare che $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ è convessa.

Metodo alternativo. Si poteva impostare il problema calcolando la derivata seconda di φ e cercando di dimostrare che è ≥ 0. Derivando sotto il segno di integrale, rimandando a dopo le verifiche, e integrando solo dove $f \neq 0$, in modo da non avere problemi dove $\ln|f|$ non esiste, viene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\int_X |f|^p\,d\mu &= \frac{\partial^n}{\partial p^n}\int_{\{f\neq 0\}} |f|^p\,d\mu = \int_{\{f\neq 0\}} \frac{\partial^n}{\partial p^n}|f|^p\,d\mu = \\ &= \int_{\{f\neq 0\}} \frac{\partial^n}{\partial p^n} e^{p\ln|f|}\,d\mu = \int_{\{f\neq 0\}} \left(\ln|f|\right)^n e^{p\ln|f|}\,d\mu = \int_{\{f\neq 0\}} \left(\ln|f|\right)^n |f|^p\,d\mu\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\varphi'(p) &= \frac{\partial}{\partial p}\ln\int_{\{f\neq 0\}} |f|^p\,d\mu = \frac{\int_{\{f\neq 0\}}(\ln|f|)|f|^p\,d\mu}{\int_{\{f\neq 0\}}|f|^p d\mu}, \\ \varphi''(p) &= \frac{\int_{\{f\neq 0\}}(\ln|f|)^2|f|^p\,d\mu \int_{\{f\neq 0\}}|f|^p d\mu - (\int_{\{f\neq 0\}}(\ln|f|)|f|^p\,d\mu)^2}{(\int_{\{f\neq 0\}}|f|^p d\mu)^2} = \\ &= \frac{\int_{\{f\neq 0\}}(\ln|f|)^2|f|^p\,d\mu \int_{\{f\neq 0\}}|f|^p d\mu - (\int_{\{f\neq 0\}}(\ln|f|)|f|^p\,d\mu)^2}{(\int_{\{f\neq 0\}}|f|^p d\mu)^2}\,.\end{aligned}$$

Ora, applicando Hölder con esponenti coniugati uguali a 2,

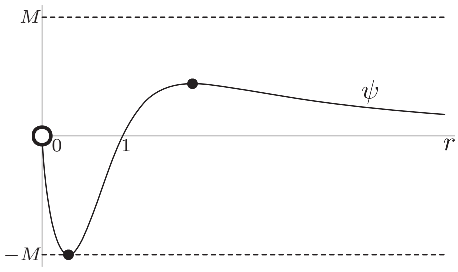
$$\begin{aligned}\left|\int_{\{f\neq 0\}}(\ln|f|)|f|^p\,d\mu\right| &\leq \int_{\{f\neq 0\}} \big|\ln|f|\big| \cdot |f|^p\,d\mu = \\ &= \int_{\{f\neq 0\}} \underbrace{\big|(\ln|f|)\big||f|^{p/2}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{|f|^{p/2}}_{\geq 0}\,d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_{\{f\neq 0\}} \left((\ln|f|)|f|^{p/2}\right)^2 d\mu\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\{f\neq 0\}} \left(|f|^{p/2}\right)^2 d\mu\right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{\{f\neq 0\}} (\ln|f|)^2|f|^p d\mu\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\{f\neq 0\}} |f|^p\,d\mu\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Elevando al quadrato primo e ultimo membro si ottengono i due addendi del numeratore di $\varphi''(p)$, che risulta quindi ≥ 0. Si intende che $|f|\ln^n|f| = 0$ nei punti in cui $f = 0$. Resta da verificare che la derivazione sotto il segno di integrale φ è giustificata, e questo è un poco laborioso. Prendiamo $1 \leq p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < +\infty$ tali che $f \in L^{p_1}(\mu)$ e $f \in L^{p_2}(\mu)$. Se riusciamo a dimostrare che la funzione

$$\sup_{p\in[p_2,p_3]} \big||f|^p \ln^n|f|\big| \,.$$

è in $L^1(\mu)$, cioè che ha integrale finito su X, seguirà che φ è di classe C^∞ su $[p_2, p_3]$ con derivate date dalle formule. Quello che abbiamo in mente è di dimostrare una maggiorazione del tipo

$$\big||f|^p \ln^n|f|\big| \leq M\big(|f|^{p_1} + |f|^{p_4}\big) \in L^1(\mu) \qquad \forall p \in [p_2, p_3]\,.$$



Fissiamo $p \in [p_2, p_3]$ e $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione di variabile reale

$$\psi(r) := \frac{r^p \ln^n r}{r^{p_1} + r^{p_4}} \qquad \text{per } r > 0\,.$$

La disuguaglianza $||f|^p \ln^n|f|| \leq M(|f|^{p_1} + |f|^{p_4})$ segue se dimostriamo che $|\psi| \leq M$. Dunque, ψ è una funzione continua su $]0, +\infty[$. Perché sia limitata basta che abbia limite finito agli estremi del dominio. Per $r \to 0^+$ (in particolare $0 < r < 1$) possiamo scrivere

$$\big|\psi(r)\big| = \left|\frac{r^p \ln^n r}{r^{p_1} + r^{p_4}}\right| \leq \frac{r^{p_2}|\ln^n r|}{r^{p_1}} = \left|\frac{\ln r}{r^{(p_1-p_2)/n}}\right|^n,$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per $r \to 0^+$, come si vede usando l'Hôpital, ricordando che $p_1 < p_2$.

$$\lim_{r\to0^+} \frac{\ln r}{r^{(p_1-p_2)/n}} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{r\to0^+} \frac{1/r}{(p_1-p_2)r^{(p_1-p_2)/n-1}/n} = \frac{n}{p_1-p_2} \lim_{r\to0^+} r^{-1-((p_1-p_2)/n-1)} =$$

$$= \frac{n}{p_1-p_2} \lim_{r\to0^+} r^{p_2-p_1} = 0\,.$$

Per $r \to +\infty$ (in particolare $r > 1$) possiamo scrivere

$$\big|\psi(r)\big| = \left|\frac{r^p \ln^n r}{r^{p_1} + r^{p_4}}\right| \leq \frac{r^{p_3}|\ln^n r|}{r^{p_4}} = \left|\frac{\ln r}{r^{(p_4-p_3)/n}}\right|^n,$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per $r \to 0^+$, come si vede usando l'Hôpital, o ragionando per ordini di infinito, non scordando che $p_3 < p_4$. Ricapitolando, la funzione $\psi(r)$ è continua su $]0, +\infty[$ ed infinitesima agli estremi, quindi è limitata: esiste $M > 0$ tale che

$$\left|\frac{r^p \ln^n r}{r^{p_1} + r^{p_4}}\right| \leq M\,,$$

cioè

$$|r^p \ln^n r| \leq M(r^{p_1} + r^{p_4}) \quad \forall r > 0\,.$$

Scrivendo la disuguaglianza con $r = |f|$ si ha che

$$\big||f|^p \ln^n|f|\big| \leq M\big(|f|^{p_1} + |f|^{p_4}\big) \in L^1(\mu)$$

come desiderato.
La φ è derivabile due volte e convessa su $]p_1, p_2[$, ma cosa succede agli estremi? Beh, se in un estremo la φ è finita potrebbe non essere derivabile, ma si può verificare che è continua, e quindi la disuguaglianza di convessità, che vale quando i punti sono interni, passa tranquillamente al limite.