Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/01

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 3 dicembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con $0 < \mu(X) < +\infty$, e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, con $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Poniamo $a_p := \|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu$ per $p \geq 1$.

a. Dimostrare che se $0 < \lambda < \|f\|_\infty$ e $p \geq 1$ allora

$$\|f\|_\infty \geq \frac{a_{p+1}}{a_p} \geq \frac{\|f\|_{p+1}}{\mu(X)^{1/(p+1)}} \geq \lambda \cdot \left(\frac{\mu\big(\{|f| > \lambda\}\big)}{\mu(X)} \right)^{1/(p+1)} .$$

(La prima disuguaglianza è ovvia; la seconda viene da Hölder applicata a $\int |f|^p$).

b. Dimostrare che $a_{p+1}/a_p \to \|f\|_\infty$ per $p \to +\infty$.

2. Data l'equazione differenziale $x'' + 2x = f(t)$ con f periodica di periodo 2π, vogliamo trovarne una soluzione usando le serie di Fourier. Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, e $F \in L^2(\mathbb{U})$. Siano a_n i coefficienti di Fourier di F rispetto alla solita base $\{z^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Supponiamo che $a_0 = 0$. Al solito poniamo $f(t) := F(e^{it})$ per $t \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} , \qquad x_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ikt}$$

a. Determinare i coefficienti b_k in modo tale che $x_n'' + 2x_n = f_n$. Fissati quei coefficienti, dimostrare che x_n e x_n' convergono uniformemente su $\mathbb{R}$ rispettivamente a una funzione x di classe C^1 e alla sua derivata x'.
(Per la convergenza uniforme di x' usare la disuguaglianza di Schwarz in ℓ^2).

b. Con $x(t)$ la funzione del punto precedente, dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \big| x_n''(t) + 2x_n(t) - f(t) \big|^2 dt = 0$$

e che $x'(t) - x'(0) + \int_0^t 2x(s)ds = \int_0^t f(s)ds$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

c. Se y_1, y_2 sono funzioni C^1 tali che $y_i'(t) - y_i'(0) + \int_0^t 2y_i(s)ds = \int_0^t f(s)ds$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1, 2\}$, allora $y_1 - y_2$ è di classe C^∞ ed è una soluzione dell'equazione omogenea associata $u'' + 2u = 0$. Inoltre in ogni punto t_0 in cui f è continua le y_i hanno derivata seconda e vale $y_i''(t_0) + 2y_i(t_0) = f(t_0)$.

Punti: 15+10, 15+15+10.