Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 27 novembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Si vuole dare una dimostrazione ad hoc della formula di integrazione in coordinate polari nel piano, senza usare il teorema del cambio di variabile generale. Sia allora $X :=]0,+\infty[^2$ il primo quadrante (aperto) del piano, $Y :=]0,+\infty[\times]0,\pi/2[$, e definiamo l'omeomorfismo $\varphi\colon X \to Y$ come $\varphi(x,y) := (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x))$. Sia λ_2 la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$.

a. Dimostrare che se $E \subseteq X$ è un boreliano in X allora $\varphi(E)$ è un boreliano in Y.

b. Per ogni E boreliano in X definiamo

$$\mu(E) := \int_{\psi^{-1}(E)} r\,dr\,d\theta\,.$$

Dimostrare che μ è una misura regolare sui boreliani di X.

c. Sia $R :=]a,b] \times]c,d] \subset X$. Dimostrare che $\mu(R) = \lambda_2(R)$. (Si può cominciare col caso $a = c = 0$).

d. Dimostrare che μ e λ_2 coincidono su tutti i boreliani di X. (Cominciare con gli aperti, e poi ricordare che μ è regolare).

e. Dimostrare che se $f\colon X \to \mathbb{R}$ è boreliana e ≥ 0 allora

$$\int_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_Y f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta\,.$$

2. Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura positiva, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili tali che $\sum_n f_n$ converge μ-quasi ovunque alla funzione f. Dimostrare che $\|f\|_{L^p} \leq \sum_n \|f_n\|_{L^p}$.

Punti: 8+8+12+8+8, 15.

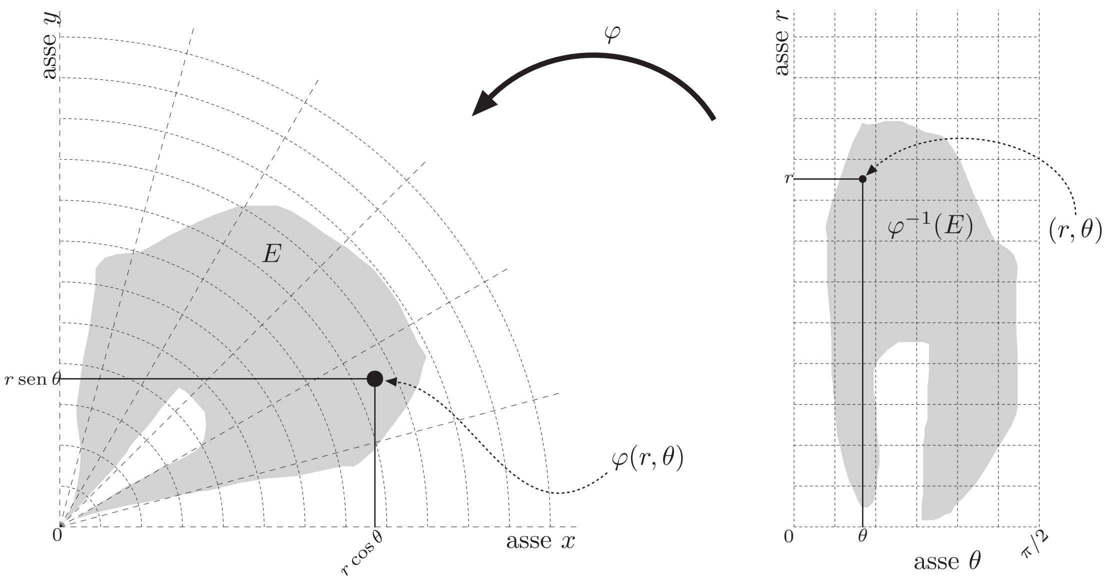
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 27 novembre 2000

Svolgimento

1. Sia $X :=]0, +\infty[^2$ il primo quadrante (aperto) del piano, $Y :=]0, +\infty[\times]0, \pi/2[$, e definiamo l'omeomorfismo $\varphi\colon Y \to X$ come $\varphi(r, \theta) := (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. Diamo per scontato che φ sia davvero un omeomorfismo. Sia λ_2 la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$.



a. Per ogni E boreliano in X poniamo

$$\mu(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} r\,dr\,d\theta\,.$$

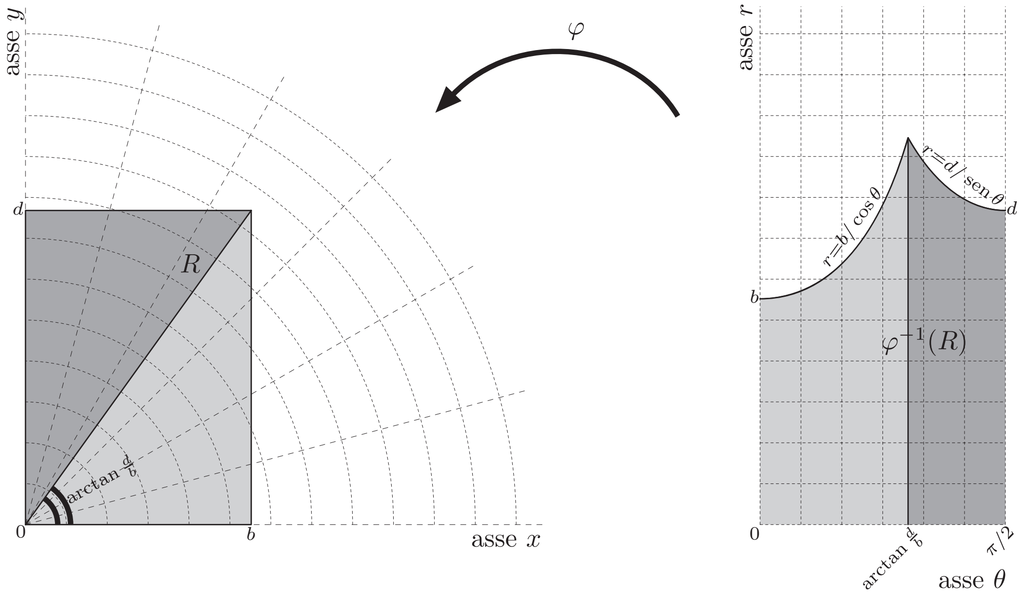
Questa definizione ha senso perché la contrimmagine tramite φ (che è continua) di un boreliano è boreliana, e inoltre la funzione $(r, \theta) \mapsto r$ è continua (quindi misurabile secondo Lebesgue) e positiva (su Y). Chiaramente $\mu(E) \geq 0$ e $\mu(\varnothing) = 0$. Sia E_n una successione di boreliani di X a due a due disgiunti. Poiché φ^{-1} è iniettiva, anche le contrimmagini degli E_n sono a due a due disgiunte, oltre a essere insiemi boreliani di Y. Dunque

$$\chi_{\varphi^{-1}(\bigcup_n E_n)} = \chi_{\bigcup_n \varphi^{-1}(E_n)} = \sum_n \chi_{\varphi^{-1}(E_n)}\,.$$

Posto $\rho(r, \theta) := r$,

$$\mu\Big(\bigcup_n E_n\Big) = \int_{\varphi^{-1}\left(\bigcup_n E_n\right)} \rho\,d\lambda_2 = \int_Y \rho\chi_{\varphi^{-1}(\bigcup_n E_n)}\,d\lambda_2 = \int_Y \Big(\sum_n \chi_{\varphi^{-1}(E_n)}\Big)\rho\,d\lambda_2 =$$
$$= \sum_n \int_Y \chi_{\varphi^{-1}(E_n)}\rho\,d\lambda_2 = \sum_n \int_{\varphi^{-1}(E_n)} \rho\,d\lambda_2 = \sum_n \mu(E_n)\,.$$

Questo dimostra che μ è una misura sui boreliani di X. Inoltre μ è finita sui compatti. Sia infatti K un compatto di X. Poiché φ^{-1} è continua, $L := \varphi^{-1}(K)$ è anch'esso un compatto, e, giacché anche ρ è continua, $\mu(K) = \int_L \rho\,d\lambda_2$ è un numero finito. Dato che X è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto in cui ogni aperto è σ-compatto (X è un aperto di $\mathbb{R}^2$, il quale ha questa proprietà), per un noto teorema μ è una misura boreliana regolare.



b. Cominciamo col caso di un rettangolo semiaperto con un vertice nell'origine. Siano $b, d > 0$ e poniamo $R :=]0, b] \times]0, d]$. Allora

$$(r, \theta) \in \varphi^{-1}(R) \iff \exists (x, y) \in R \text{ tale che } \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Esplicitiamo rispetto a r, θ:

$$\begin{aligned} (r,\theta) \in \varphi^{-1}(R) &\iff \left(\exists (x,y) \in]0,b] \times]0,d] \quad \begin{cases} r > 0 \\ 0 < \theta < \pi/2 \\ x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \right) \iff \\ &\iff \begin{cases} 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 < r\cos\theta \le b \\ 0 < r\operatorname{sen}\theta \le d \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 < r \le b/\cos\theta \\ 0 < r \le d/\operatorname{sen}\theta \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 < r \le \min\{b/\cos\theta, d/\operatorname{sen}\theta\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale conviene esplicitare l'espressione $\min\{b/\cos\theta, d/\operatorname{sen}\theta\}$, ricordando che nel primo quadrante seni e coseni sono positivi:

$$\frac{b}{\cos\theta} \le \frac{d}{\operatorname{sen}\theta} \iff \tan\theta \le \frac{d}{b} \iff 0 < \theta \le \arctan\frac{d}{b}.$$

Quindi

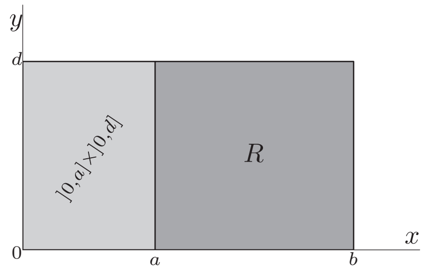
$$(r,\theta) \in \varphi^{-1}(R) \iff \left(\begin{cases} 0 < \theta \le \arctan(d/b), \\ 0 < r \le b/\cos\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \arctan(d/b) < \theta < \pi/2, \\ 0 < r \le d/\operatorname{sen}\theta. \end{cases} \right)$$

Dunque

$$\mu(R) = \int_{\varphi^{-1}(R)} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\arctan(d/b)} d\theta \int_0^{b/\cos\theta} r\,dr + \int_{\theta=\arctan(d/b)}^{\pi/2} d\theta \int_0^{d/\operatorname{sen}\theta} r\,dr =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\theta=0}^{\arctan(d/b)} d\theta \int_0^{b/\cos\theta} r\,dr + \int_{\theta=\arctan(d/b)}^{\pi/2} d\theta \int_0^{d/\operatorname{sen}\theta} r\,dr = \\
&= \int_{\theta=0}^{\arctan(d/b)} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{b/\cos\theta} d\theta + \int_{\theta=\arctan(d/b)}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{d/\operatorname{sen}\theta} d\theta = \\
&= \frac{b^2}{2}\int_{\theta=0}^{\arctan(d/b)} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta + \frac{d^2}{2}\int_{\theta=\arctan(d/b)}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = \\
&= \frac{b^2}{2}\big[\tan\theta\big]_{\theta=0}^{\arctan(d/b)} + \frac{d^2}{2}\big[-\cot\theta\big]_{\theta=\arctan(d/b)}^{\pi/2} = \\
&= \frac{b^2}{2}\tan\arctan(d/b) + \frac{d^2}{2}\big(-0+\cot\arctan(d/b)\big) = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{d}{b} + \frac{d^2}{2}\cdot\frac{1}{\tan\arctan(d/b)} = \\
&= \frac{bd}{2} + \frac{d^2}{2}\cdot\frac{1}{d/b} = \frac{bd}{2} + \frac{bd}{2} = bd = \lambda_2(R)\,.
\end{aligned}
$$

Prendiamo ora un rettangolo con un lato sull'asse x: $R =]a,b] \times]0,d]$. Possiamo vedere R come la differenza di due rettangoli, uno contenuto nell'altro, con un vertice nell'origine:

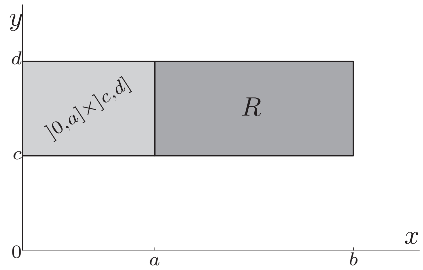


$$R =]a,b] \times]0,d] = \big(]0,b] \times]0,d]\big) \setminus \big(]0,a] \times]0,d]\big)\,.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\mu(R) &= \mu\Big(\big(]0,b] \times]0,d]\big) \setminus \big(]0,b] \times]0,d]\big)\Big) = \\
&= \mu\Big(\big(]0,b] \times]0,d]\big)\Big) - \mu\Big(\big(]0,a] \times]0,d]\big)\Big) = \\
&= \lambda_2\Big(\big(]0,b] \times]0,d]\big)\Big) - \lambda_2\Big(\big(]0,a] \times]0,d]\big)\Big) = \lambda_2\Big(\big(]0,b] \times]0,d]\big) \setminus \big(]0,b] \times]0,d]\big)\Big) = \\
&= \lambda_2(R)\,.
\end{aligned}
$$

Infine un rettangolo generico si può vedere come la differenza fra due rettangoli, uno contenuto nell'altro, aventi ciascuno un lato sull'asse x: se $R =]a,b] \times]c,d]$ abbiamo che

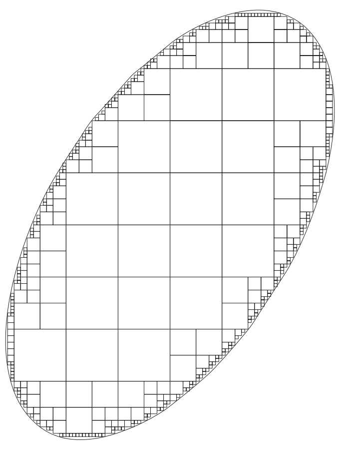


$$R =]a,b] \times]c,d] = \big(]0,b] \times]c,d]\big) \setminus \big(]0,a] \times]c,d]\big)\,,$$

per cui

$$
\begin{aligned}
\mu(R) &= \mu\Big(\big(]0,b] \times]c,d]\big) \setminus \big(]0,a] \times]c,d]\big)\Big) = \\
&= \mu\Big(\big(]0,b] \times]c,d]\big)\Big) - \mu\Big(\big(]0,a] \times]c,d]\big)\Big) = \\
&= \lambda_2\Big(\big(]0,b] \times]c,d]\big)\Big) - \lambda_2\Big(\big(]0,a] \times]c,d]\big)\Big) = \lambda_2\Big(\big(]0,b] \times]c,d]\big) \setminus \big(]0,a] \times]c,d]\big)\Big) = \\
&= \lambda_2(R)\,.
\end{aligned}
$$

c. Sia V un aperto di $X =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Questo V è anche un aperto di $\mathbb{R}^2$, e sappiamo che ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli semiaperti della forma $R =]a,b] \times]c,d]$ *a due a due disgiunti*. La figura qui accanto suggerisce un tale ricoprimento per un'ellisse. Quindi



$$\mu(V) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(R_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_2(R_n) = \lambda_2\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\Big) = \lambda_2(V)\,.$$

Sia ora E un boreliano di X. Per la regolarità di μ e di λ_2 possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
\mu(E) &= \inf\big\{\mu(V) \;:\; V \text{ è aperto e } \supseteq E\big\} = \\
&= \inf\big\{\lambda_2(V) \;:\; V \text{ è aperto e } \supseteq E\big\} = \\
&= \lambda_2(E)\,.
\end{aligned}
$$

Questo dimostra che $\mu = \lambda_2$ su tutti i boreliani.

d. Cominciamo col caso $f = \chi_E$, con E boreliano in X. Poiché φ^{-1} è biiettiva

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = f\big(\varphi(r,\theta)\big) = \chi_E\big(\varphi(r,\theta)\big) &= \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(r,\theta)\in E, \\ 0 & \text{se } \varphi(r,\theta)\in X\setminus E \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } (r,\theta)\in \varphi^{-1}(E) \\ 0 & \text{se } (r,\theta)\in \varphi^{-1}(X\setminus E) = Y\setminus\varphi^{-1}(E) \end{cases} \\ &= \chi_{\varphi^{-1}(E)}(r,\theta) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_Y f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta &= \int_Y \chi_{\varphi^{-1}(E)}\cdot\rho\,d\lambda_2 = \int_{\varphi^{-1}(E)} \rho\,d\lambda_2 = \mu(E) = \lambda_2(E) = \int_X \chi_E\,d\lambda_2 = \\ &= \int_X f\,d\lambda_2\,. \end{aligned}$$

Se $f\colon X\to[0,+\infty]$ è una funzione boreliana esistono dei boreliani $E_n\subset X$ e dei coefficienti $c_n\ge 0$ tali che $f = \sum_n c_n\chi_{E_n}$. Allora, per il teorema di integrazione per serie positive:

$$\begin{aligned} \int_Y (f\circ\varphi)\cdot\rho\,d\lambda_2 &= \int_Y\left(\left(\sum_n c_n\chi_{E_n}\right)\circ\varphi\right)\rho\,d\lambda_2 = \int_Y\left(\sum_n c_n\chi_{E_n}\circ\varphi\right)\rho\,d\lambda_2 = \\ &= \sum_n c_n\int_Y \big(\chi_{E_n}\circ\varphi\big)\rho\,d\lambda_2 = \sum_n c_n\int_X \chi_{E_n}\,d\lambda_2 = \int_X\left(\sum_n c_n\chi_{E_n}\right)d\lambda_2 = \\ &= \int_X f\,d\lambda_2\,. \end{aligned}$$

e. Se vogliamo una formula per l'integrale di f su un boreliano $E\subset X$ basta applicare la formula con $f\chi_E$ al posto di E:

$$\begin{aligned} \int_E f\,d\lambda_2 &= \int_X f\chi_E\,d\lambda_2 = \int_Y \big((f\chi_E)\circ\varphi\big)\cdot\rho\,d\lambda_2 = \int_Y (f\circ\varphi)\cdot(\chi_E\circ\varphi)\cdot\rho\,d\lambda_2 = \\ &= \int_Y (f\circ\varphi)\cdot\big(\chi_{\varphi^{-1}(E)}\big)\cdot\rho\,d\lambda_2 = \int_{\varphi^{-1}(E)} (f\circ\varphi)\cdot\rho\,d\lambda_2 = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(E)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta\,. \end{aligned}$$

2. Cominciamo col caso in cui p è finito: sia $1\le p\le+\infty$ e sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura positiva, $f_n\colon X\to\mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili tali che $\sum_n f_n$ converge μ-quasi ovunque alla funzione f. Allora:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &= \int_X |f|^p\,d\mu = \int_X\left|\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right|^p d\mu = \quad \text{(per la definizione di somma di una serie)} \\ &= \int_X\left|\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p d\mu = \quad \text{(poiché la funzione } t\mapsto t^p \text{ è continua per } t>0) \\ &= \int_X \lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p d\mu = \quad \text{(il limite coincide col minimo limite)} \\ &= \int_X \min\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p d\mu \le \quad \text{(lemma di Fatou)} \\ &\le \min\lim_{n\to+\infty}\int_X\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p d\mu = \quad \text{(definizione di norma in } L^p) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \min_{n\to+\infty}\lim \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_{L^p}^{p} = \quad \text{(disuguaglianza di Minkowski, e crescenza di } t \mapsto t^p \text{ per } t > 0)\\
&\le \min_{n\to+\infty}\lim \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^p} \right)^{p} = \quad (t \mapsto t^p \text{ è crescente e continua per } t > 0)\\
&\le \left(\min_{n\to+\infty}\lim \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^p} \right)^{p} = \quad \text{(definizione di serie)}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_{L^p} \right)^{p}.
\end{aligned}
$$

Elevando alla $1/p$ il primo e l'ultimo membro della catena di disuguaglianze si ottiene che

$$
\|f\|_{L^p} \le \sum_{n} \|f_n\|_{L^p}.
$$

Il caso $p = +\infty$ è più facile: dato che, per definizione di norma in L^∞, $|f_k| \le \|f_k\|_{L^\infty}$ μ-quasi ovunque, sommando membro a membro per $k = 1, \ldots, n$:

$$
\left| \sum_{k=1}^{n} f_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k| \le \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^\infty} \qquad \mu \text{ quasi ovunque,}
$$

da cui, passando al limite per $n \to +\infty$,

$$
|f| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_{L^\infty} \qquad \mu \text{ quasi ovunque,}
$$

e infine, di nuovo per definizione di norma in L^∞,

$$
\|f\|_{L^\infty} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_{L^\infty}.
$$