Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 19 settembre 2000

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Documento di identità (se chiesto):

| |
|---|
| |

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

**1.** Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva e $1 \leq p < +\infty$.

**a.** Sia $f_n \in L^p(\mu)$ una successione convergente in $L^p(\mu)$. Dimostrare che esiste una sottosuccessione $f_{n_k}$ convergente puntualmente $\mu$-quasi ovunque, e una funzione $F \in L^p(\mu)$ tali che $|f_{n_k}| \leq F$ per ogni $k$.

(Rivedere la dimostrazione della completezza di $L^p$).

**b.** Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $M > 0$ una costante tali che $|\varphi(x)| \leq M|x|^{p-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione $\Phi(f, g) := \int_X (\varphi \circ f) \cdot g \, d\mu$ è ben definita e continua da $L^p(\mu) \times L^p(\mu)$ in $\mathbb{R}$.

(Usando il punto **a** dimostrare che da ogni sottosuccessione di una successione convergente in $L^p(\mu)^2$ si può estrarre un'ulteriore sottosuccessione sulla quale $\Phi$ converge).

**2.** Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, e sia $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ definita da $F(e^{it}) := e^t$ per $t \in [-\pi, \pi[$. Calcolare i coefficienti di Fourier di $F$ rispetto all'usuale base hilbertiana $\{z^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$, discutere la convergenza della serie di Fourier in diversi sensi, e dedurne le formule

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} \pi \,, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{2\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} \,,$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{1+(2k)^2} + \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{(-1)^k (2k+1)}{1+(2k+1)^2} = \frac{2\pi e^{\pi/2}}{e^\pi - e^{-\pi}} \,.$$

(Bessel, $F(1)$, $F(i)$).

*Punti: 10+8, 20.*

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 19 settembre 2000

Svolgimento

**1. a.** Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, $1 \le p < +\infty$, $f_n \in L^p(\mu)$ una successione che converge in $L^p(\mu)$ a $f$. Vogliamo dimostrare che esiste una sottosuccessione $f_{n_k}$ che converge $\mu$-quasi ovunque, ed esiste $F \in L^p(\mu)$ tale che $|f_{n_k}| \le F$ $\mu$-quasi ovunque. Per fare questo adattiamo la dimostrazione nota della completezza di $L^p(\mu)$. Poiché $f_n$ converge nello spazio metrico $L^p(\mu)$, esiste una sottosuccessione $f_{n_k}$ a variazione limitata, cioè tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p(\mu)} < +\infty\,.$$

Poniamo

$$F := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{+\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\,.$$

La serie ha senso perché gli addendi sono $\ge 0$. La funzione $F$ va da $X$ in $[0, +\infty]$ ed è misurabile. Inoltre è in $L^p(\mu)$. Infatti se poniamo

$$F_N := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\,,$$

dalla disuguaglianza di Minkowski abbiamo che

$$\|F_N\|_{L^p} \le \|f_{n_1}\|_{L^p} + \sum_{k=1}^{N} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \le \|f_{n_1}\|_{L^p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} = c < +\infty\,,$$

cioè

$$\int_X |F_N|^p \, d\mu \le c^p \qquad \forall N > 0\,.$$

La successione di funzioni $N \mapsto |F_N|^p$ è positiva, crescente, e tende puntualmente a $|F|^p$. Quindi, applicando il teorema della convergenza monotona, ricaviamo che

$$\int_X |F|^p \, d\mu \le c^p\,,$$

e quindi che $F \in L^p(\mu)$. In particolare $F$ è quasi ovunque finita. Telescopizzando:

$$f_{n_i} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{i-1} \big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big) \qquad \forall i \ge 2\,,$$

da cui

$$|f_{n_i}| \le |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{i-1} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \le F \qquad \forall i \ge 2\,.$$

Infine la successione $f_{n_i}$ converge quasi ovunque perché si può interpretare come la successione delle somme parziali della serie

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big)\,,$$

la quale converge assolutamente quasi ovunque:

$$|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{+\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| = F < +\infty \quad \mu\text{-quasi ovunque.}$$

Per $p = +\infty$ l'affermazione vale ancora, e non c'è nemmeno bisogno di estrarre sottosuccessioni: se $f_n \to f$ in $L^\infty$ allora c'è già convergenza puntuale quasi ovunque, e possiamo prendere $F := |f| + \sup_n \|f_n - f\|_\infty$.

**b.** Sia $1 < p < +\infty$, $M > 0$ e $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $|\varphi(x)| \le M|x|^{p-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$\Phi(f,g) := \int_X (\varphi \circ f) \cdot g \, d\mu \qquad \text{per } f, g \in L^p(\mu)\,.$$

Questa $\Phi$ è ben definita e a valori reali finiti. Infatti, per la disuguaglianza di Hölder applicata con gli esponenti coniugati $q = p/(p-1)$ e $p$,

$$\int_X \big|(\varphi \circ f) \cdot g\big| \, d\mu \le \left( \int_X |\varphi \circ f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \left( \int_X \big(M\,|f|^{p-1}\big)^q d\mu \right)^{1/q} \|g\|_{L^p} =$$

$$= M \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{(p-1)/p} \|g\|_{L^p} = M \|f\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p} < +\infty\,.$$

Dati due spazi metrici $X, Y$, e una funzione $g: X \to Y$, la $g$ è continua in $x \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n$ che tende a $x$ esiste una sottosuccessione $x_{n_k}$ tale che $g(x_{n_k}) \to g(x)$. Il "solo se" è ovvio. Per il viceversa, se per assurdo esistesse una $x_n$ tendente a $x$, ma per la quale $g(x_n)$ non tendesse a $g(x)$, allora esisterebbe $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione $x_{n_i}$ tale che $d(g(x_{n_i}), g(x)) \ge \varepsilon$. La $x_{n_i}$ converge a $x$ ma da $g(x_{n_i})$ non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente a $g(x)$.
Dimostriamo che $\Phi: L^p \times L^p \to \mathbb{R}$ è continua. Sia $(f_n, g_n)$ una successione di coppie di funzioni che converge in $L^p \times L^p$ verso $(f, g)$. Dobbiamo dimostrare che esiste una sottosuccessione $(f_{n_k}, g_{n_k})$ tale che $\Phi(f_{n_k}, g_{n_k}) \to \Phi(f, g)$. Cominciamo coll'estrarre una sottosuccessione $f_{n_k}$ come nel punto **a**, cioè tale che $f_{n_k}$ converge puntualmente (a $f$, ovviamente), ed esiste $F \in L^p$ tale che $|f_{n_k}| \le F$. Estraendo eventualmente una nuova sottosuccessione possiamo supporre anche che $g_{n_k}$ converga a $g$ puntualmente quasi ovunque e che esista $G \in L^p$ tale che $|g_{n_k}| \le G$. Allora $\Phi(f_{n_k}, g_{n_k}) = (\varphi \circ f_{n_k}) \cdot g_{n_k}$ converge puntualmente quasi ovunque a $(\varphi \circ f) \cdot g$, perché $\varphi$ è continua. Inoltre

$$\big|(\varphi \circ f_{n_k}) \cdot g_{n_k}\big| \le M\,|f_{n_k}|^{p-1} \cdot |g_{n_k}| \le M F^{p-1} G \qquad \mu\text{-quasi ovunque } \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

La funzione $F^{p-1}G$ è in $L^1(\mu)$. Infatti, ancora per la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $q = p/(p-1)$ e $p$,

$$\int_X \big|F^{p-1} G\big| \, d\mu \le \left( \int_X \big|F^{p-1}\big|^{p/(p-1)} \, d\mu \right)^{(p-1)/p} \left( \int_X |G|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|F\|_{L^p}^{p-1} \, \|G\|_{L^p} < +\infty\,.$$

Per il teorema di convergenza dominata possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(f_{n_k}, g_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} \int_X (\varphi \circ f_{n_k}) \cdot g_{n_k} \, d\mu = \int_X \left( \lim_{k\to+\infty} (\varphi \circ f_{n_k}) \cdot g_{n_k} \right) d\mu = \int_X (\varphi \circ f) \cdot g \, d\mu = \Phi(f,g).$$

Con questo è stabilito che $\Phi$ è continua su $L^p \times L^p$.
Nel caso $p = 1$ la disuguaglianza $|\varphi(x)| \le M\,|x|^{p-1}$ significa semplicemente $|\varphi(x)| \le M$, cioè che $\varphi$ è limitata. Prendiamo una successione $(f_n, g_n)$ che converge in $L^1 \times L^1$ verso $(f, g)$. Possiamo estrarre una sottosuccessione $(f_{n_k}, g_{n_k})$ che converge quasi ovunque e per la quale esiste $G \in L^1$ tale che $|g_{n_k}| \le G$ $\mu$-quasi ovunque per ogni $n$. Allora

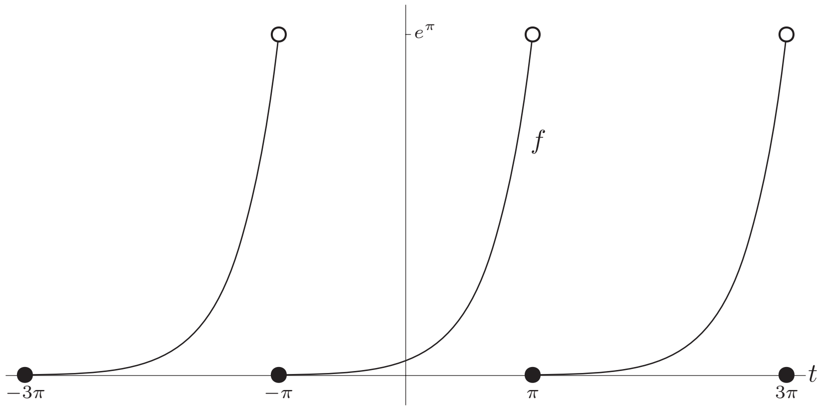
$$\big|(\varphi \circ f_{n_k}) \cdot g_{n_k}\big| \le MG \in L^1(\mu)\,.$$

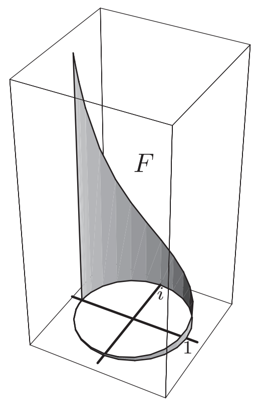
La conclusione che $\Phi(f_{n_k}, g_{n_k}) \to \Phi(f, g)$ segue come nel caso $p > 1$.

**2.** La funzione $F: \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ definita da $F(e^{it}) := e^t$ per $t \in [-\pi, \pi[$ si può anche scrivere come $F(e^{it}) = f(t)$, dove $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'unica funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $2\pi$ che coincide con $t \mapsto e^t$ per $t \in [-\pi, \pi[$, cioè

$$f(t) = e^{t - 2\pi n}\,, \qquad \text{dove } n \in \mathbb{Z} \text{ è tale che } -\pi \le t - 2n\pi < \pi, \text{ cioè } n = \left\lfloor \frac{t+\pi}{2\pi} \right\rfloor.$$

Questa funzione $f$ è continua su tutti i punti di $\mathbb{R}$ esclusi quelli di $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{Z}$, ed è limitata. Quindi $F$ è continua su $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$, è in $L^2(\mathbb{U})$, e la serie di Fourier di $F$ converge in $L^2(\mathbb{U})$. Inoltre $f$ è di classe $C^\infty$ su $\mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Quindi le ridotte della serie di Fourier di $F$ convergono puntualmente verso $F$ in tutti punti eccetto forse in $-1$. Infine, poiché la funzione $t \mapsto e^t$ è di classe $C^\infty$ su $\mathbb{R}$, nei punti di discontinuità la $f$ ha limiti da sinistra e da destra finiti e diversi, e valgono le condizioni tipo Lipschitz che garantiscono che le ridotte della serie di Fourier di $F$ nel punto $-1$ convergono alla media aritmetica fra i limiti da sinistra e da destra, cioè a $(e^\pi + e^{-\pi})/2 = \cosh \pi$.




Calcoliamo i coefficienti di Fourier rispetto al sistema trigonometrico $u_n(z) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{f}(n) = \langle f, u_n \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{U}} f \cdot \overline{u_n}\, d\lambda_{\mathbb{U}} = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot \overline{u_n(e^{it})} \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{(1-in)t}}{1-in} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{2\pi(1-in)} = \frac{e^{\pi} e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi}}{2\pi(1-in)} = \frac{e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n}{2\pi(1-in)} =$$

$$= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-in)} = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})(1+in)}{2\pi(1+n^2)} = \frac{(-1)^n (1+in) \operatorname{senh} \pi}{\pi(1+n^2)}$$

($1 - in$ non si annulla per alcun $n \in \mathbb{Z}$). Dato che la serie di Fourier converge in $L^2(\mathbb{U})$, vale l'identità di Bessel. I due membri dell'identità sono calcolabili separatamente:

$$\|F\|^2_{L^2(\mathbb{U})} = \int_{\mathbb{U}} |F|^2\, d\lambda_{\mathbb{U}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(e^{it}) \right|^2 \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^t \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{2t}}{2} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} = \frac{\operatorname{senh} 2\pi}{2\pi}$$

e

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(n) \right|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{(-1)^n (1+in) \operatorname{senh} \pi}{\pi(1+n^2)} \right|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\operatorname{senh}^2 \pi}{\pi^2 (1+n^2)^2} \left| 1 + in \right|^2 = \frac{\operatorname{senh}^2 \pi}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2}\,.$$

Uguagliando le due espressioni si ha che

$$\frac{\operatorname{senh} 2\pi}{2\pi} = \frac{\operatorname{senh}^2 \pi}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2}\,,$$

cioè

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\operatorname{senh} 2\pi}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{\operatorname{senh}^2 \pi} = \frac{\pi \operatorname{senh} 2\pi}{2 \operatorname{senh}^2 \pi} = \frac{\pi \operatorname{senh} \pi \cosh \pi}{\operatorname{senh}^2 \pi} = \frac{\pi \cosh \pi}{\operatorname{senh} \pi} = \frac{\pi}{\tanh \pi} = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \pi\,.$$

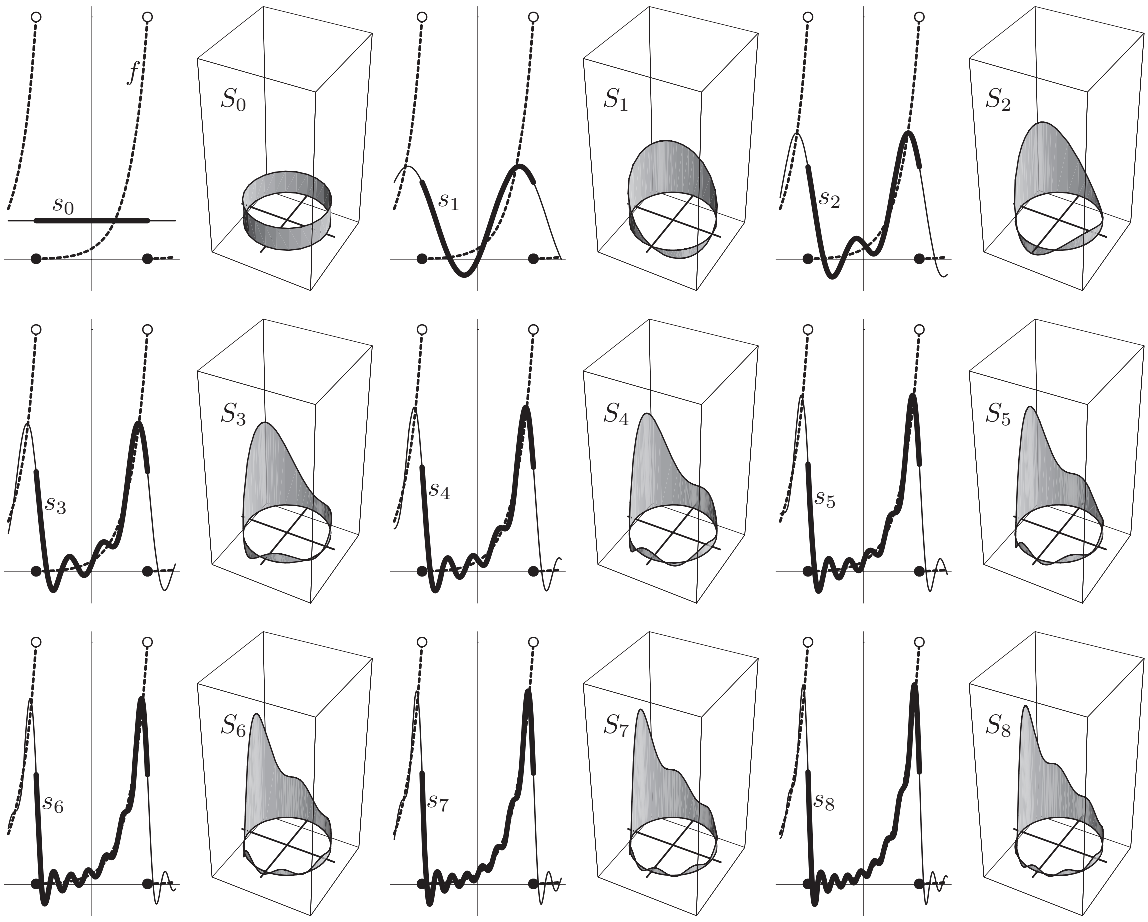
Le ridotte della serie di Fourier sono

$$S_N(z) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) u_n(z) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n (1+in) \operatorname{senh} \pi}{\pi(1+n^2)} z^n\,, \qquad s_N(t) := S_N(e^{it})\,.$$

Il punto $z = 1$ (che corrisponde a $t = 0$) è uno dei punti in cui le ridotte della serie di Fourier convergono puntualmente. Da una parte $F(1) = F(e^{i0}) = e^0 = 1$, mentre le ridotte sono

$$S_N(1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n (1+in) \operatorname{senh} \pi}{\pi(1+n^2)} 1^n = \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n \operatorname{senh} \pi}{\pi(1+n^2)} + i \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n n \operatorname{senh} \pi}{\pi(1+n^2)} =$$

$$= \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{1+n^2} + i \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}}_{=0} = \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\,.$$




(una delle somme è nulla perché i termini di indici $\pm n$ sono esattamente opposti e si cancellano, e il termine con $n = 0$ è nullo). Passando al limite si ha

$$1 = F(1) = \lim_{N\to+\infty} S_N(1) = \frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\,.$$

L'ultimo limite è quello della somma parziale di una serie che si vede convergere assolutamente. Quindi possiamo scrivere più concisamente e senza ambiguità:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{senh}\pi} = \frac{2\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\,.$$

Anche $i$, che corrisponde a $t = \pi/2$, è un punto in cui la successione delle somme parziali converge al valore di $F$. Da una parte $F(i) = F(e^{i\pi/2}) = f(\pi/2) = e^{\pi/2}$. Le somme parziali in $i$ sono, raccogliendo il fattore comune

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\operatorname{senh}\pi} S_N(i) &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2} i^n = \\ &= \sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 0 \pmod 4}} \frac{1+in}{1+n^2}\cdot 1 + \sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 1 \pmod 4}} \frac{(-1)(1+in)}{1+n^2} i +\end{aligned}$$

$$+\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 2 \pmod 4}} \frac{(1+in)}{1+n^2}(-1)+\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 3 \pmod 4}} \frac{(-1)(1+in)}{1+n^2}(-i)=$$

$$=\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 0 \pmod 4}} \frac{1+in}{1+n^2}-\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 1 \pmod 4}} \frac{i-n}{1+n^2}-\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 2 \pmod 4}} \frac{1+in}{1+n^2}+\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 3 \pmod 4}} \frac{i-n}{1+n^2}=$$

$$=\left(\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 0 \pmod 4}} \frac{1}{1+n^2}+\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 1 \pmod 4}} \frac{n}{1+n^2}-\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 2 \pmod 4}} \frac{1}{1+n^2}-\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 3 \pmod 4}} \frac{n}{1+n^2}\right)+$$

$$+i\left(\underbrace{\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 0 \pmod 4}} \frac{n}{1+n^2}}_{=0}-\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 1 \pmod 4}} \frac{1}{1+n^2}-\underbrace{\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 2 \pmod 4}} \frac{n}{1+n^2}}_{=0}+\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 3 \pmod 4}} \frac{1}{1+n^2}\right)=$$

$$=\left(\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 0 \pmod 2}} \frac{(-1)^{n/2}}{1+n^2}+\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 1 \pmod 2}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}n}{1+n^2}\right)+i\underbrace{\sum_{\substack{-N\le n\le N\\ n\equiv 1 \pmod 2}} \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{1+n^2}}_{=0}=$$

$$=\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -N\le 2k\le N}} \frac{(-1)^k}{1+4k^2}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -N\le 2k+1\le N}} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}\,.$$

Passando al limite per $N\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\operatorname{senh}\pi}e^{\pi/2}=\frac{\pi}{\operatorname{senh}\pi}F(i)&=\frac{\pi}{\operatorname{senh}\pi}\lim_{N\to+\infty}S_N(i)=\\ &=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -N\le 2k\le N}} \frac{(-1)^k}{1+4k^2}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -N\le 2k+1\le N}} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}\right)=\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{1+4k^2}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -N\le 2k+1\le N}} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Il limite rimanente si può riscrivere in altri modi:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -N\le 2k+1\le N}} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}=\lim_{K\to+\infty}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -2K+1\le 2k+1\le 2K-1}} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}=$$

$$=\lim_{K\to+\infty}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -K\le k\le K-1}} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}=\lim_{K\to+\infty}\left(-\underbrace{\frac{(-1)^K(2K+1)}{1+(2K+1)^2}}_{\to 0}+\sum_{k=-K}^{K}\frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{K\to+\infty}\sum_{k=-K}^{K}\frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}\,.$$

Quindi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{1+4k^2}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}=\frac{\pi}{\operatorname{senh}\pi}e^{\pi/2}=\frac{2\pi e^{\pi/2}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,.$$