Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 29 maggio 2000

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. a. Siano $(X,\mathcal{S})$, $(Y,\mathcal{T})$ due spazi misurabili, $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ la σ-algebra generata dalla famiglia $\{A\times B\ :\ A\in\mathcal{S}, B\in\mathcal{T}\}$ dei rettangoli misurabili. Siano poi μ,λ due misure positive e finite su $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ che coincidono su tutti i rettangoli misurabili. Dimostrare che allora $\mu=\lambda$. (Dimostrare che $\Omega := \{Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}\ :\ \mu(Q)=\lambda(Q)\}$ è una classe monotona...).

b. Dimostrare che il punto precedente rimane vero se si toglie l'ipotesi che λ e μ siano finite, ma si assume che esistono due successioni crescenti di insiemi $A_n\in\mathcal{S}$ e $B_n\in\mathcal{T}$ tali che $A_n\nearrow X$, $B_n\nearrow Y$, e inoltre tali che $\mu(A_n\times B_n)$ e $\lambda(A_n\times B_n)$ sono finiti per ogni n. ($\mathcal{M} := \{Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}\ :\ Q\cap(A_n\times B_n)\in\Omega\ \forall n\in\mathbb{N}\}$ è una classe monotona...).

2. a. Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura positiva, ed $f\colon X\to\mathbb{R}$ una funzione misurabile per la quale l'unico $p\in[1,+\infty[$ per il quale $f\in L^p(\mu)$ è $p=2$. Dimostrare che $\mu(X)=+\infty$ e che f non è essenzialmente limitata.

b. Poniamo

$$f_n(x) := \frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}(x+1)^{2/n}} \qquad \text{per } x>0,\ n\ge 1\,.$$

Dimostrare che se $1\le p<+\infty$

$$\|f_n\|_{L^p(]0,+\infty[)} = B\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)p+1, \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)p-1\right)^{1/p},$$

dove $B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ è la funzione Beta. Per quali p si ha che $f_n\in L^p(]0,+\infty[)$? Mostrare che $f_n(x)<f_{n+1}(x)<\sqrt{x}$ per ogni n, e che se $n\ge 2$ e $p>1$ allora $\|f_n\|_{L^p(]0,+\infty[)}\ge 1/(p-1)^{1/p}$.
(Per la funzione Beta basta un cambio di variabile; $f_n(x)\ge f_2(x)=1/(x+1)$ se $n\ge 2$).

c. Poniamo

$$f := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{2^n\|f_n\|_{L^2(]0,+\infty[)}}\,.$$

Dimostrare che $f\colon]0,+\infty[\ \to [0,+\infty]$ è ben definita, ovunque finita, continua, infinita in 0^+, infinitesima in $+\infty$, ed appartiene a $L^p(]0,+\infty[)$ soltanto per $p=2$.

Punti: 10+15, 10+15+15

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1998/1999

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 29 maggio 2000

Svolgimento

1. a. Siano $(X,\mathcal{S})$, $(Y,\mathcal{T})$ due spazi misurabili, $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ la σ-algebra generata dalla famiglia $\{A\times B\ :\ A\in\mathcal{S}, B\in\mathcal{T}\}$ dei rettangoli misurabili. Siano poi μ,λ due misure positive e finite su $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ che coincidono su tutti i rettangoli misurabili. Poniamo

$$\Omega := \bigl\{Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}\ :\ \mu(Q)=\lambda(Q)\bigr\}\,.$$

Dimostriamo che Ω è una classe monotona, cioè che è stabile per unioni numerabili crescenti e intersezioni numerabili decrescenti. Sia $Q_n\in\Omega$ tale che $Q_n\nearrow Q$, cioè $Q_n\subseteq Q_{n+1}$ e $Q=\bigcup_n Q_n$. Per le proprietà generali degli spazi di misura si ha che $Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ e

$$\mu(Q_n)\nearrow\mu(Q)\qquad\text{e}\qquad\lambda(Q_n)\nearrow\lambda(Q)\,.$$

Poiché per ipotesi $\mu(Q_n)=\lambda(Q_n)$ abbiamo che anche $\mu(Q)=\lambda(Q)$, cioè $Q\in\Omega$. Similmente, supponiamo che $Q_n\in\Omega$ e $Q_n\searrow Q$, cioè $Q_n\supseteq Q_{n+1}$ e $Q=\bigcap_n Q_n$. Ancora $Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$. Inoltre dato che per ipotesi $\mu(Q_1)\le\mu(X\times Y)<+\infty$ e $\lambda(Q_1)\le\lambda(X\times Y)<+\infty$ abbiamo che

$$\mu(Q_n)\searrow\mu(Q)\qquad\text{e}\qquad\lambda(Q_n)\searrow\lambda(Q)\,.$$

Come prima, concludiamo che $Q\in\Omega$. In effetti Ω è una classe monotona. Dimostriamo ora che Ω è stabile per unioni finite disgiunte. Siano $P,Q\in\Omega$ con $P\cap Q=\varnothing$. Allora, poiché μ e λ sono misure che coincidono su Ω,

$$\mu(P\cup Q)=\mu(P)+\mu(Q)=\lambda(P)+\lambda(Q)=\lambda(P\cup Q)\,.$$

Quindi anche $P\cup Q\in\Omega$. Dato che gli insiemi elementari sono unioni finite disgiunte di rettangoli misurabili, abbiamo che Ω contiene tutti gli insiemi elementari. Sapendo che $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ è la più piccola classe monotona contenente gli insiemi elementari, deduciamo che $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ contiene Ω. L'altra inclusione viene direttamente dalla definizione di Ω. Concludiamo che, come desiderato,

$$\Omega=\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}\,.$$

b. Siano $(X,\mathcal{S})$, $(Y,\mathcal{T})$ due spazi misurabili. Siano poi μ,λ due misure positive su $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ che coincidono su tutti i rettangoli misurabili. Supponiamo inoltre che esistano due successioni $A_n\in\mathcal{S}$ e $B_n\in\mathcal{T}$ tali che

$$A_n\nearrow X\,,\quad B_n\nearrow Y\,,\quad\text{e}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\mu(A_n\times B_n)<+\infty\,,\quad\lambda(A_n\times B_n)<+\infty\,.$$

Poniamo come sopra

$$\Omega := \bigl\{Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}\ :\ \mu(Q)=\lambda(Q)\bigr\}\,.$$

Non è più chiaro se Ω sia una classe monotona, perché le successioni decrescenti di insiemi non partono più necessariamente da insiemi di misura finita. Poniamo però

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &:= \{Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}\ :\ Q\cap(A_n\times B_n)\in\Omega\quad\forall n\in\mathbb{N}\}=\\ &=\Bigl\{Q\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}\ :\ \mu\bigl(Q\cap(A_n\times B_n)\bigr)=\lambda\bigl(Q\cap(A_n\times B_n)\bigr)\quad\forall n\in\mathbb{N}\Bigr\}\,.\end{aligned}$$

Dimostriamo che $\mathcal{M}$ è una classe monotona. Sia $\mathcal{M}\ni Q_k\nearrow Q$. Allora

$$\forall k,n\in\mathbb{N}\qquad\mu\bigl(Q_k\cap(A_n\times B_n)\bigr)=\lambda\bigl(Q_k\cap(A_n\times B_n)\bigr)\,.$$

La successione $k \mapsto Q_k \cap (A_n \times B_n)$ cresce ed ha per unione $Q \cap (A_n \times B_n)$. Per le proprietà delle misure sulle successioni crescenti abbiamo che

$$\begin{aligned}\mu\bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr) &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \mu\bigl(Q_k \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda\bigl(Q_k \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \lambda\bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Quindi $Q \in \mathcal{M}$. Sia $\mathcal{M} \ni Q_k \searrow Q$. Come prima, dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\bigl(Q_1 \cap (A_n \times B_n)\bigr) \le \mu(A_n \times B_n) < +\infty \qquad \text{e} \qquad \lambda\bigl(Q_1 \cap (A_n \times B_n)\bigr) \le \lambda(A_n \times B_n) < +\infty\,,$$

si può passare al limite nelle misure, e risulta

$$\begin{aligned}\mu\bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr) &= \inf_{k\in\mathbb{N}} \mu\bigl(Q_k \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \\ &= \inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda\bigl(Q_k \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \lambda\bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\end{aligned}$$

per cui ancora $Q \in \mathcal{M}$. Dunque $\mathcal{M}$ è davvero una classe monotona. Dimostriamo che $\mathcal{M}$ è stabile per unioni finite disgiunte. Siano $P, Q \in \mathcal{M}$ con $P \cap Q = \varnothing$. Allora

$$\bigl(P \cap (A_n \times B_n)\bigr) \cap \bigl(P \cap (A_n \times B_n)\bigr) = P \cap Q \cap (A_n \times B_n) = \varnothing \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Quindi per l'additività delle misure

$$\begin{aligned}\mu\bigl((P \cup Q) \cap (A_n \times B_n)\bigr) &= \mu\Bigl(\bigl(P \cap (A_n \times B_n)\bigr) \cup \bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr)\Bigr) = \\ &= \mu\bigl(P \cap (A_n \times B_n)\bigr) + \mu\bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \lambda\bigl(P \cap (A_n \times B_n)\bigr) + \lambda\bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \\ &= \lambda\Bigl(\bigl(P \cap (A_n \times B_n)\bigr) \cup \bigl(Q \cap (A_n \times B_n)\bigr)\Bigr) = \\ &= \lambda\bigl((P \cup Q) \cap (A_n \times B_n)\bigr) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Pertanto anche $P \cup Q \in \mathcal{M}$. Verifichiamo che $\mathcal{M}$ contiene tutti i rettangoli misurabili. Siano $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Allora

$$(A \times B) \cap (A_n \times B_n) = (A \cap A_n) \times (B \cap B_n)$$

è un rettangolo misurabile, e quindi per ipotesi μ e λ hanno su di esso la stessa misura:

$$\mu\bigl((A \times B) \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \lambda\bigl((A \times B) \cap (A_n \times B_n)\bigr)\,,$$

cioè

$$A \times B \in \mathcal{M}\,.$$

Poiché $\mathcal{M}$ contiene i rettangoli misurabili ed è stabile per unioni finite, contiene anche gli insiemi elementari. Essendo $\mathcal{M}$ una classe monotona contenente gli elementari, contiene anche $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. In altre parole

$$\forall E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad E \cap (A_n \times B_n) \in \Omega\,,$$

o ancora,

$$\forall E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mu\bigl(E \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \lambda\bigl(E \cap (A_n \times B_n)\bigr)\,,$$

Sia $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. La successione di insiemi $n \mapsto A_n \times B_n$ è crescente e l'unione al variare di $n \in \mathbb{N}$ è $X \times Y$. Quindi

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\bigl(E \cap (X \times Y)\bigr) = \mu\Bigl(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n\Bigr) = \mu\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap (A_n \times B_n)\Bigr) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu\bigl(E \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda\bigl(E \cap (A_n \times B_n)\bigr) = \lambda\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap (A_n \times B_n)\Bigr) = \lambda\Bigl(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n\Bigr) = \lambda\bigl(E \cap (X \times Y)\bigr) = \\ &= \lambda(E)\,.\end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare, μ e λ coincidono su $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$.

2. a. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, ed $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile per la quale l'unico $p \in [1, +\infty[$ per il quale $f \in L^p(\mu)$ è $p = 2$. Sia $1 < p < 2$. Si ha che $p_0 := 2/p \in]1, +\infty[$. Sia q_0 l'esponente coniugato di p_0. Applicando la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu &\le \\ &\le \Big(\int_X (|f|^p)^{p_0} d\mu\Big)^{1/p_0} \Big(\int_X 1^{1/q_0} \, d\mu\Big)^{1/q_0} = \Big(\int_X |f|^{pp_0} d\mu\Big)^{1/p_0} \big(\mu(X)\big)^{1/q_0} = \\ &= \underbrace{\Big(\int_X |f|^2 d\mu\Big)}_{<+\infty}{}^{1/p_0} \big(\mu(X)\big)^{1/q_0} .\end{aligned}$$

Se per assurdo $\mu(X) < +\infty$ allora $f \in L^p(\mu)$ per ogni $p \in]1, 2[$, contro le ipotesi. Quindi $\mu(X) < +\infty$.
Sia ora $p \in]2, +\infty[$. Allora, dato che $p \mapsto a^p$ è decrescente quando $0 \le a \le 1$,

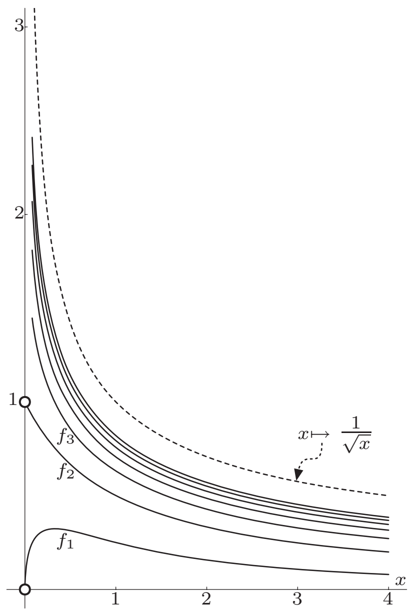
$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_{\{|f| \le 1\}} |f|^p \, d\mu + \int_{\{|f|>1\}} |f|^p \le \underbrace{\int_{\{|f| \le 1\}} |f|^2 \, d\mu}_{\le \|f\|^2_{L^2} < +\infty} + \|f\|^p_\infty \cdot \underbrace{\mu\big(\{f > 1\}\big)}_{<+\infty} .$$

L'insieme $\{f > 1\}$ ha misura finita perché $f \in L^2(\mu)$. Se per assurdo f fosse essenzialmente limitata, allora l'ultimo membro della disuguaglianza sarebbe finito, da cui $f \in L^p(\mu)$, contro l'ipotesi. Quindi f non è essenzialmente limitata.

b. È data la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{1}{x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} (x+1)^{2/n}} \qquad \text{per } x > 0, \ n \ge 1 .$$

Grafici delle prime f_n e del loro limite $1/\sqrt{x}$ sono mostrati qui accanto. Nell'integrale



$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{p}{2} - \frac{p}{n}} (x+1)^{2p/n}} \, dx$$

facciamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{1+x}, \quad \text{cioè} \quad x = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t},$$

per cui $dx = -(1/t^2) dt$. Risulta

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p \, dx &= \int_1^0 \Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{p}{2} - \frac{p}{n}} t^{2p/n} \Big(-\frac{1}{t^2}\Big) dt = \\ &= \int_0^1 t^{\frac{p}{2} - \frac{p}{n} + \frac{2p}{n} - 2} (1-t)^{-\frac{p}{2} + \frac{p}{n}} \, dt = \\ &= \int_0^1 t^{\frac{p}{2} + \frac{p}{n} - 2} (1-t)^{\frac{p}{n} - \frac{p}{2}} \, dt = \\ &= B\Big(\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\Big)p + 1, \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\Big)p - 1\Big) = B\Big(\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\Big)p - 1, \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\Big)p + 1\Big)\end{aligned}$$

(ricordando che la funzione Beta è simmetrica). Per trovare i p per i quali $f_n \in L^p(]0, +\infty[)$ possiamo per esempio esaminare il comportamento asintotico di $|f_n(x)|^p$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, oppure usare il fatto noto che $B(a, b)$ è finita per $a, b > 0$. Risolviamo le disequazioni:

$$\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\Big)p - 1 > 0 \iff \frac{(2+n)p - 2n}{2n} > 0 \iff p > \frac{2n}{2+n} = 2 - \frac{4}{2+n}$$

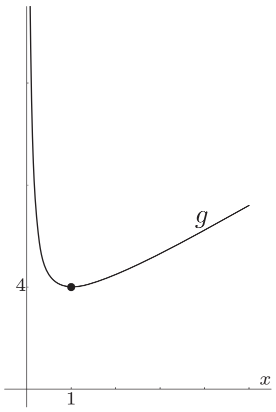
$$\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\Big)p + 1 > 0 \iff \frac{(2-n)p + 2n}{2n} > 0 \iff (n-2)p < 2n$$

Quindi, notando anche che $f_n \in L^\infty(]0,+\infty[)$ per $n=1$ e per $n=2$, e che $2-4/(2+n)$ vale $2/3$ per $n=1$ e vale 1 per $n=2$,

$$f_n \in L^p\big(]0,+\infty[\big) \quad\iff\quad \begin{cases} 1 \le p \le +\infty & \text{se } n=1,\\ 1 < p \le +\infty & \text{se } n=2,\\ 2-\dfrac{4}{2+n} < p < 2+\dfrac{4}{n-2} & \text{se } n\ge 3. \end{cases}$$

Per dimostrare che $n \mapsto f_n(x)$ è crescente, cerchiamo di semplificare la dipendenza di $f_n(x)$ da n:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{x^{\frac12-\frac1n}(x+1)^{2/n}} = \frac{1}{x^{\frac12-\frac1n}(x+1)^{2(\frac1n-\frac12)+1}} = \frac{1}{x^{\frac12-\frac1n}(x+1)^{-2(\frac12-\frac1n)}}\cdot\frac{1}{x+1} = \\ &= \Big(\frac{(x+1)^2}{x}\Big)^{\frac12-\frac1n}\cdot\frac{1}{x+1}\,. \end{aligned}$$



Studiamo brevemente la funzione

$$g(x) := \frac{(x+1)^2}{x} \qquad \text{per } x>0\,.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2(x+1)\cdot x-(x+1)^2\cdot 1}{x^2} = \frac{(x+1)(2x-x-1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}\,,$$

che è negativa per $0<|x|<1$ e positiva per $|x|>1$, da cui

$$\min_{x>0} g(x) = g(1) = 4 > 1\,.$$

La disuguaglianza si può provare per via più elementare con l'identità $g(x) = 4+(x-1)^2/x$. Dato che $g(x)>1$ e che $n\mapsto 1/2-1/n$ è crescente, pure la seguente successione è crescente:

$$n \mapsto f_n(x) = g(x)^{\frac12-\frac1n}\cdot\frac{1}{x+1} \qquad \text{per } x>0.$$

Alla crescenza rispetto a n si poteva arrivare anche derivando rispetto a n, dato che vale la relazione

$$\frac{\partial f_n(x)}{\partial n} = \frac{\ln g(x)}{n^2} f_n(x) > 0\,.$$

Il limite di $f_n(x)$ per $n\to+\infty$ è $1/\sqrt{x}$, che non appartiene a $L^p(]0,+\infty[)$ per alcun p. Infine, se $n\ge 2$ e $1<p<+\infty$,

$$\|f_n\|_p^p = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p\,dx \ge \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^p}\,dx = \Big[\frac{(x+1)^{1-p}}{1-p}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-1}\,,$$

da cui

$$\|f_n\|_p \ge \frac{1}{(p-1)^{1/p}} \qquad \text{per } n\ge 2,\ 1<p<+\infty.$$

c. Consideriamo la somma di tutte le f_n:

$$f := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{2^n\|f_n\|_{L^2(]0,+\infty[)}}\,.$$

Qui accanto c'è un grafico delle prime somme parziali. La serie ha senso puntualmente, perché tutte le funzioni della serie sono ≥ 0 su $]0,+\infty[$. Inoltre la serie converge nella norma di $L^2(]0,+\infty[)$ perché la somma delle norme converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\|\frac{f_n}{2^n\|f_n\|_{L^2}}\Big\|_{L^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\|f_n\|_{L^2}}{2^n\|f_n\|_{L^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 1 < +\infty\,.$$

In particolare f è finita quasi ovunque. Maggioriamo ciascun addendo, usando il fatto che $0 < f_n(x) < \sqrt{x}$ e che $\|f_n\|_{L^2(]0,+\infty[)} \geq 1/(2-1)^{1/2} = 1$ per $n \geq 2$,

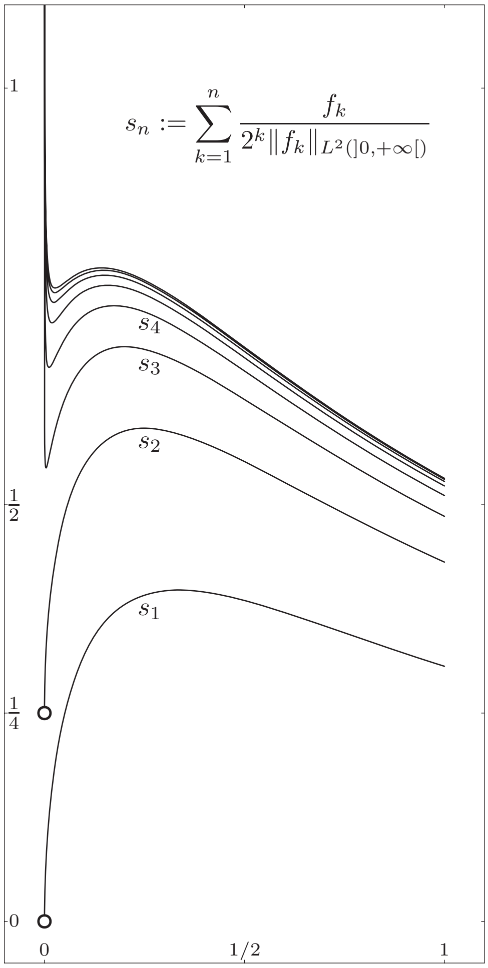
$$\frac{|f_n(x)|}{2^n\|f_n\|_{L^2(]0,+\infty[)}} \leq \frac{1/\sqrt{x}}{2^n} = \frac{1}{2^n\sqrt{x}} \qquad \text{per } n\geq 2\,.$$

Quindi la serie converge totalmente su ogni semiretta del tipo $[\varepsilon,+\infty[$, perché

$$\sum_{n\geq 2}\sup_{x\geq\varepsilon}\Big|\frac{f_n(x)}{2^n\|f_n\|_{L^2}}\Big| \leq \sum_{n\geq 2}\sup_{x\geq\varepsilon}\frac{1}{2^n\sqrt{x}} = $$
$$= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^n\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} < +\infty\,.$$

Pertanto la funzione $f(x)$ è finita e continua su $]0,+\infty[$. La funzione $f(x)$ diverge per $x\to 0^+$ perché per esempio

$$f(x) \geq \frac{f_3(x)}{2^3\|f_3\|_{L^2}} \geq \frac{1}{8x^{\frac12-\frac13}(x+1)^{2/3}} =$$
$$= \frac{1}{8x^{1/6}(x+1)^{2/3}} \to +\infty \quad \text{per } x\to 0^+\,.$$



Che la $f(x)$ sia infinitesima per $x\to+\infty$ si può vedere per esempio con la maggiorazione

$$0 \leq f(x) = \frac{f_1(x)}{2^n\|f_1\|_{L^2}} + \sum_{n\geq 2}\frac{f_n(x)}{2^n\|f_n\|_{L^2}} <$$
$$< f_1(x) + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^n\sqrt{x}} = f_1(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{-1/2}(x+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } x\to+\infty\,.$$

Un altro modo è di notare che poiché la serie converge uniformemente su $[\varepsilon,+\infty[$ possiamo scambiare la serie e il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sum_{n\geq 1}\frac{f_n(x)}{2^n\|f_n\|_{L^2}} = \sum_{n\geq 1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{2^n\|f_n\|_{L^2}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n\|f_n\|_{L^2}}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} 0 = 0\,.$$

La f appartiene a $L^2(]0,+\infty[)$ perché abbiamo già notato che la serie converge in L^2. Sia ora $p\in[1,+\infty[\setminus\{2\}$. Sia $n_0\geq 3$ tale che

$$2-\frac{4}{2+n_0} \geq p \quad \text{oppure} \quad p \geq 2+\frac{4}{n_0-2}\,.$$

In particolare $f_{n_0}\notin L^p(]0,+\infty[)$. Allora, poiché la serie è a termini positivi,

$$f \geq \frac{f_{n_0}}{2^{n_0}\|f_{n_0}\|_{L^2(]0,+\infty[)}} \geq 0\,.$$

Elevando alla p e integrando i tre membri otteniamo che f non appartiene a $L^p(]0,+\infty[)$ se $p\neq 2$.