Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 15 febbraio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $1 \leq p < +\infty$, $f_n, f \in L^p(\mu)$, $g_n, g \in L^\infty(\mu)$ tali che $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$, $\sup_n \|g_n\|_\infty < +\infty$, $g_n \to g$ μ-quasi ovunque. Dimostrare che allora $g_n f_n \to gf$ in $L^p(\mu)$. Cosa succede se si toglie l'ipotesi che $\sup_n \|g_n\|_\infty < +\infty$?

2. a. Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 con $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$, e sia $a > 0$ tale che $g(t) \neq 0$ per ogni $t \in]0, a]$. Dimostrare che

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^a \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{g(t)}\, dt \quad \text{esiste ed è uguale a} \quad \frac{\pi}{2g'(0)} .$$

(Scrivere $1/g(t) = 1/(g'(0)t) + f(t)$, mostrare che $f(t)$ ha limite finito per $t \to 0^+$, e poi riportarsi al noto integrale di Dirichlet con un cambio di variabile e il lemma di Riemann-Lebesgue).

b. Dimostrare che il punto **a** continua a valere se invece di chiedere che $g \in C^2$ si chiede che $g \in C^1$ e che però esistano $M, \alpha, \varepsilon > 0$ tali che $|g'(t) - g'(0)| \leq M t^\alpha$ per ogni $t \in [0, \varepsilon]$. (La f del punto **a** non ha necessariamente limite finito nell'origine, ma si può maggiorare).

Punti: 10, 15+8

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 15 febbraio 2000

Svolgimento

1. Usando la disuguaglianza triangolare per la norma di L^p si può scrivere:

$$\begin{aligned}\big\|g_nf_n - gf\big\|_p &= \big\|(g_nf_n - g_nf) + (g_nf - gf)\big\|_p \le \big\|g_n\cdot(f_n-f)\big\|_p + \big\|(g_n-g)f\big\|_p = \\ &= \left(\int_X |g_n|^p\cdot|f_n-f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X \big|(g_n-g)f\big|^p d\mu\right)^{1/p} \le \\ &\le \|g_n\|_\infty\left(\int_X |f_n-f|^p\,d\mu\right) + \left(\int_X \big|(g_n-g)f\big|^p d\mu\right)^{1/p} = \\ &= \left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\|g_k\|_\infty\right)\underbrace{\|f_n-f\|_p}_{\to 0} + \left(\int_X \big|(g_n-g)f\big|^p d\mu\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale è infinitesimo per convergenza dominata: per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha che μ-quasi ovunque

$$\big|(g_n-g)f\big|^p \le \big(|g_n|+|g|\big)^p|f|^p \le \left(2\sup_{k\in\mathbb{N}}\|g_k\|_\infty\right)^p |f|^p \in L^1(\mu)$$

e inoltre $(g_n-g)f\to 0$ μ-quasi ovunque per $n\to+\infty$. In definitiva $\|g_nf_n-gf\|_p\to 0$ per $n\to+\infty$.
Il risultato non vale se si toglie l'ipotesi che $\sup_n\|g_n\|_\infty<+\infty$. Prendiamo per esempio $X=\,]0,1]$ con la misura di Lebesgue, $g_n := n^2\chi_{]0,1/n]}$, $g\equiv 0$, $f_n\equiv f\equiv 1$. Allora chiaramente $g_n\to g$ puntualmente, $f_n\to f$ in $L^p(]0,1])$ per ogni p. Però

$$\begin{aligned}\|g_nf_n-gf\|_p = \|g_nf_n\|_p &= \left(\int_{]0,1]}\big|n^2\chi_{]0,1/n]}(x)\cdot 1\big|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^{1/n} n^{2p}dx\right)^{1/p} = \\ &= \left(\frac{n^{2p}}{n}\right)^{1/p} = n^{(2p-1)/p} \longrightarrow +\infty \text{ per } n\to+\infty\end{aligned}$$

perché $(2p-1)/p>0$. Quindi non è vero che $g_nf_n\to gf$.

2. a. Verifichiamo per cominciare che l'integrale è ben definito: la funzione $t\mapsto(\operatorname{sen}\lambda t)/g(t)$ è continua su $]0,a]$, e per $t\to 0^+$ tende al limite finito $\lambda/g'(0)$, come si può vedere con la regola de L'Hôpital o con la formula di Taylor:

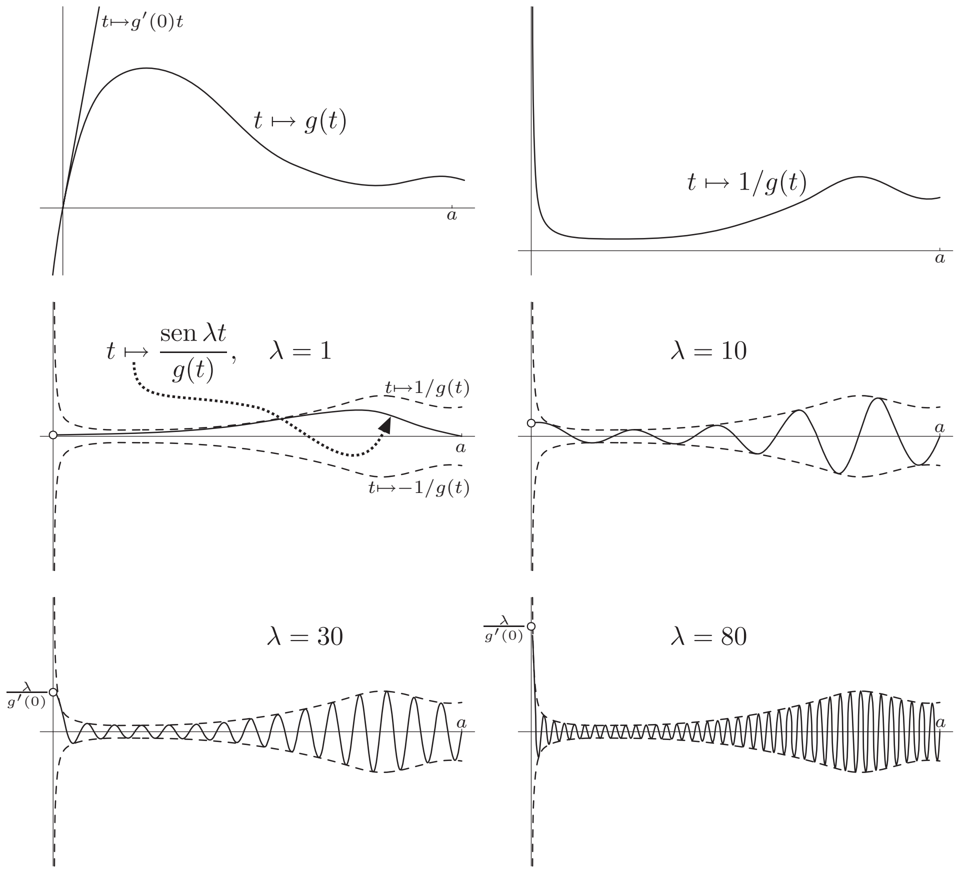
$$\lim_{t\to0^+}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{g(t)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{\lambda\cos\lambda t}{g'(t)} = \frac{\lambda}{g'(0)}, \qquad \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{g(t)} = \frac{\lambda t + o(t)}{g(0)+g'(0)t+o(t)} = \frac{\lambda+o(1)}{g'(0)+o(1)} \longrightarrow \frac{\lambda}{g'(0)}.$$

Quindi l'integrale esiste finito per ogni λ. Il problema nel calcolarne il limite per $\lambda\to+\infty$ è che l'integrando non ha limite puntuale (eccetto che per $t=0$). Nel caso particolare in cui $g(t)\equiv t$ il nostro limite si riporta al noto integrale di Dirichlet col cambio di variabile $x=\lambda t$:

$$\int_0^a\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt = \int_0^{\lambda a}\frac{\operatorname{sen}x}{x/\lambda}\cdot\frac{dx}{\lambda} = \int_0^{\lambda a}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx \longrightarrow \frac{\pi}{2}\quad\text{per }\lambda\to+\infty.$$

Scriviamo $1/g(t)$ come somma della "parte lineare" $1/(g'(0)t)$, che sappiamo trattare riportandoci all'integrale di Dirichlet, con un "resto", che cercheremo di valutare col lemma di Riemann-Lebesgue:

$$\frac{1}{g(t)} = \frac{1}{g'(0)t} + \left(\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g'(0)t}\right) = \frac{1}{g'(0)t} + \frac{g'(0)t-g(t)}{g(t)g'(0)t}.$$



La funzione resto

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{g'(0)t - g(t)}{g(t)g'(0)t} & \text{per } 0 < t \leq a, \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \text{ e per } t > a, \end{cases}$$

è continua su $]0, a]$ e nulla fuori. Se dimostriamo che f ha limite finito per $t \to 0^+$ avremo anche che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Possiamo calcolarne il limite con la regola de L'Hôpital due volte:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} f(t) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{g'(0)t - g(t)}{g(t)g'(0)t} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{g'(0) - g'(t)}{g'(t)g'(0)t + g(t)g'(0)} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-g''(t)}{g''(t)g'(0)t + g'(t)g'(0) + g'(t)g'(0)} = -\frac{g''(0)}{2g'(0)^2} \end{aligned}$$

oppure con la formula di Taylor del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{g'(0)t - g(t)}{g(t)g'(0)t} &= \frac{g'(0)t - \big(g(0) + g'(0)t + g''(0)t^2/2 + o(t^2)\big)}{\big(g(0) + g'(0)t + o(t)\big)g'(0)t} = \frac{-g''(0)t^2/2 + o(t^2)}{g'(0)^2t^2 + o(t^2)} = \\ &= \frac{-g''(0)/2 + o(1)}{g'(0)^2 + o(1)} \longrightarrow -\frac{g''(0)}{2g'(0)^2} \,. \end{aligned}$$

Dunque $f(t)$ ha davvero finito per $t \to 0^+$. Possiamo applicare ora il lemma di Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt = \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, dt = \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\right) \frac{1}{2\pi} \big[-\cos t\big]_0^{2\pi} = 0 \,.$$

Torniamo all'integrale di partenza, usando in uno degli integrali il cambio di variabile $x = \lambda t$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{g(t)}\,dt &= \int_0^a \frac{1}{g(t)}\operatorname{sen}\lambda t\,dt = \int_0^a \left(\frac{1}{g'(0)t} + f(t)\right)\operatorname{sen}\lambda t\,dt = \\ &= \frac{1}{g'(0)}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt + \int_0^a f(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt = \\ &= \frac{1}{g'(0)}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt + \int_{\mathbb{R}} f(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt = \\ &= \frac{1}{g'(0)}\int_0^{\lambda a} \frac{\operatorname{sen} x}{x/\lambda}\cdot\frac{dx}{\lambda} + \int_{\mathbb{R}} f(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt = \\ &= \frac{1}{g'(0)}\int_0^{\lambda a} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx + \int_{\mathbb{R}} f(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt\,.\end{aligned}$$

Otteniamo infine

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{g(t)}\,dt = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{g'(0)}\int_0^{\lambda a}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx + \int_{\mathbb{R}} f(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt\right) = \frac{1}{g'(0)}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2g'(0)}\,.$$

b. Proviamo a dimostrare che $f \in L^1(\mathbb{R})$ anche nelle ipotesi più deboli che abbiamo ora: esistono $M, \alpha, \varepsilon > 0$ tali che $|g'(t) - g'(0)| \le Mt^\alpha$ per ogni $t \in [0,\varepsilon]$. Se $t \in [0,\varepsilon]$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\bigl|g'(0)t - g(t)\bigr| &= \left|g'(0)t - \int_0^t g'(s)\,ds\right| = \left|\int_0^t \bigl(g'(0) - g'(s)\bigr)ds\right| \le \\ &\le \int_0^t \bigl|g'(0) - g'(s)\bigr|\,ds \le \int_0^t Ms^\alpha\,ds = \frac{Mt^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\end{aligned}$$

e quindi vale la stima asintotica

$$f(t) = \frac{g'(0)t - g(t)}{g(t)g'(0)t} = \frac{O(t^{\alpha+1})}{g'(0)^2t^2 + o(t^2)} = O(t^{-1+\alpha}) \qquad \text{per } t \to 0^+\,.$$

La f è davvero in $L^1(\mathbb{R})$ e i ragionamenti del punto **a** si possono ripetere.