Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 24 gennaio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Sia $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1\}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, dotato della misura boreliana λ invariante per rotazioni e normalizzata. Sia $D_N(z) := \sum_{n=-N}^{N} z^n$ il nucleo di Dirichlet. Poniamo

$$F_k(z) := \frac{1}{k+1} \sum_{N=0}^{k} D_N(z) \qquad \text{per } k \in \mathbb{N},\, z \in \mathbb{U}.$$

a. Dimostrare che se $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$F_k(z) = \frac{1}{(k+1)z^k}\left(\frac{z^{k+1}-1}{z-1}\right)^2, \qquad F_k(e^{it}) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right)^2.$$

b. Dimostrare che F_k è un polinomio trigonometrico, $\int_{\mathbb{U}} F_k \, d\lambda = 1$ e $F_k(z) \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{U}$, e che $\lim_{k\to+\infty} \sup_{|z-1|>\varepsilon} |F_k(z)| = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

c. Sia $g\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Sia $s_N(z) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) z^n$ la somma parziale della serie di Fourier di f rispetto alla base $\{z^n \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $\sigma_k := (s_0 + s_1 + \cdots + s_k)/(k+1)$ è una successione di polinomi trigonometrici che converge *uniformemente* a g per $k \to +\infty$.

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}$, λ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione. Siano $\operatorname{ipo} f$, $\operatorname{epi} f$, $\operatorname{graph} f$ gli insiemi delle coppie $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ tali che rispettivamente $t < f(x)$, $t > f(x)$, $t = f(x)$. Per $c \in \mathbb{R}$ poniamo anche $\operatorname{ipo}_c f := (X \times]c, +\infty[) \cap \operatorname{ipo} f$.

a. Dimostrare che si equivalgono le tre condizioni (i) f è misurabile, (ii) $\operatorname{ipo} f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, (iii) $\operatorname{epi} f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Inoltre le tre condizioni implicano che $\operatorname{graph} f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e (se la μ è σ-finita) $(\mu \otimes \lambda)(\operatorname{graph} f) = 0$.
(Se f è misurabile mostrare che esistono due successioni $g_n, h_n\colon X \to \mathbb{R}$ di funzioni misurabili e con immagine al più numerabile tali che $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$).

b. Sia μ σ-finita. Se f è misurabile e ≥ 0 allora $\int_X f \, d\mu = (\mu \otimes \lambda)(\operatorname{ipo}_0 f) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\}) \, dt$.

c. Siano $X = [0,1]$ e $f \geq 0$. Se f è integrabile secondo Riemann su $[0,1]$ allora $\chi_{\operatorname{graph} f}$ è integrabile secondo Riemann su $[0,1] \times \mathbb{R}$ con integrale nullo, ma non viceversa.

Punti: 10+8+8, 15+10+15

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

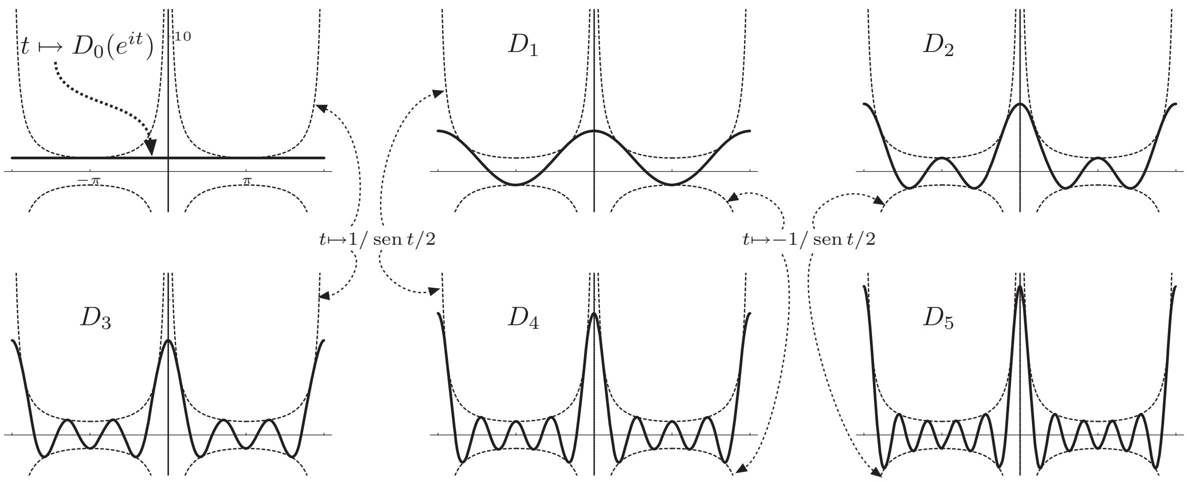
Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

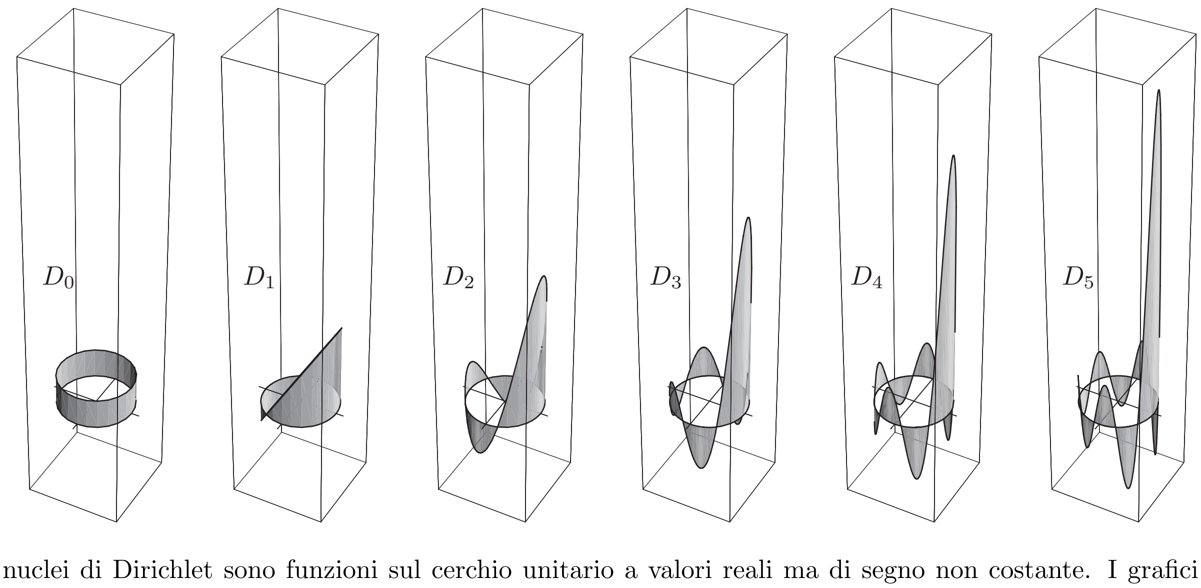
Prova Scritta del 24 gennaio 2000

Svolgimento

1. a. Se per caso ce la siamo scordata, ricaviamo la formula alternativa per il nucleo di Dirichlet, usando la formula nota per la somma di una progressione geometrica:

$$D_N(z) := \sum_{n=-N}^{N} z^n = z^{-N} \sum_{n=-N}^{N} z^{n+N} = z^{-N} \sum_{k=0}^{2N} z^k = \begin{cases} 2N+1 & \text{se } z = 1, \\ z^{-N} \dfrac{1 - z^{2N+1}}{1 - z} & \text{se } z \neq 1. \end{cases}$$



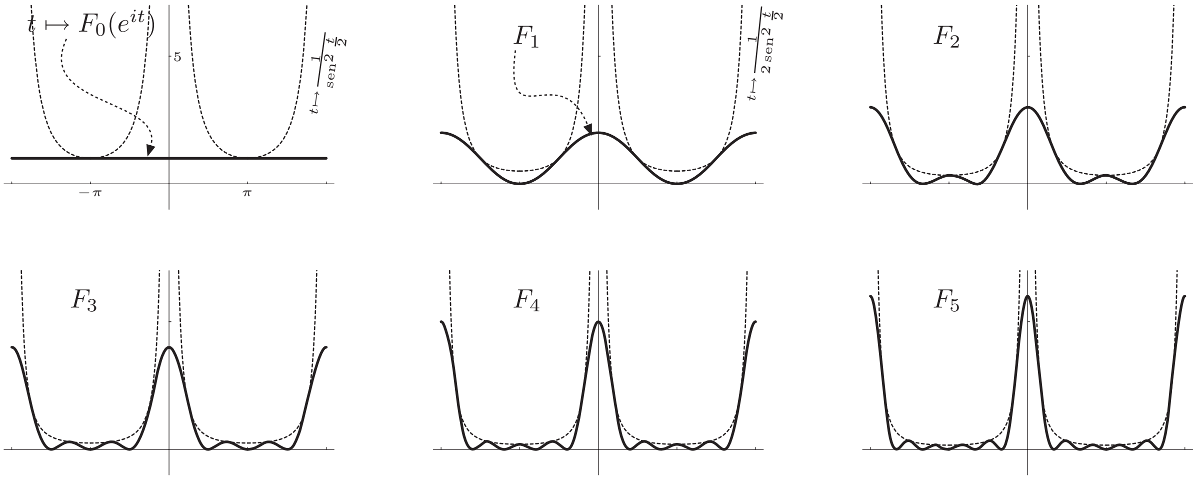


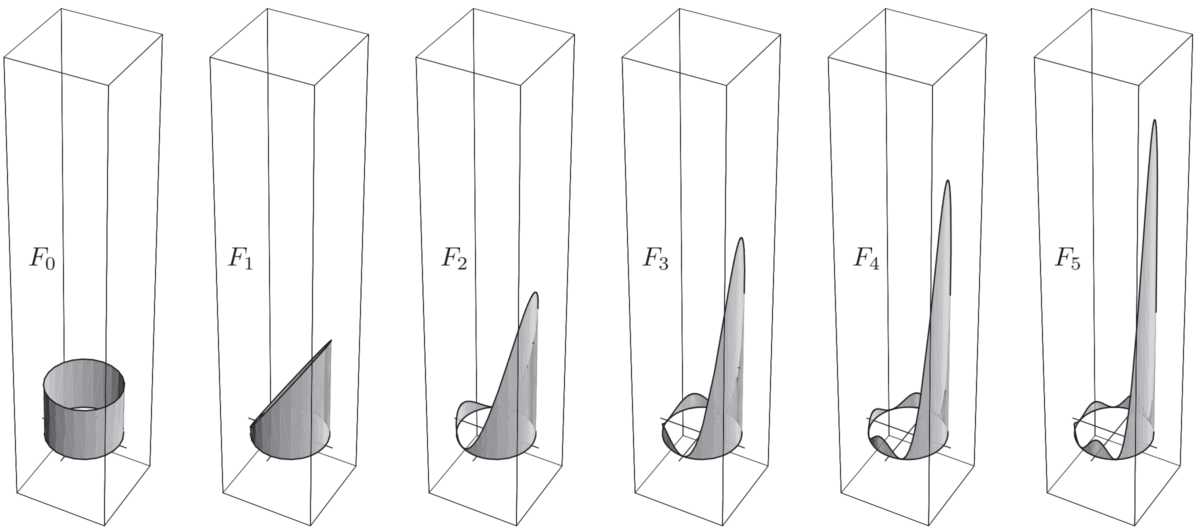
I nuclei di Dirichlet sono funzioni sul cerchio unitario a valori reali ma di segno non costante. I grafici di $D_0, \ldots, D_5$ sono mostrati qui sopra, come funzioni periodiche sulla retta e come funzioni sul cerchio unitario.

La quantità

$$F_k(z) := \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} D_N(z)\,,$$

che è anche detta *"nucleo di Fejér"* (L. Fejér, ungherese, 1880-1959), è la media aritmetica dei primi $k+1$ nuclei di Dirichlet. Come tale è ovviamente a valori reali. La cosa sorprendente è che non è mai negativa.





Applichiamo a F_k la formula alternativa per D_N, cominciando dal caso $z \neq 1$

$$\begin{aligned}
F_k(z) &= \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} D_N(z) = \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} z^{-N}\frac{1-z^{2N+1}}{1-z} = \frac{1}{(k+1)(1-z)}\sum_{N=0}^{k}\big((1/z)^N - z^{N+1}\big) = \\
&= \frac{1}{(k+1)(1-z)}\left(\frac{1-(1/z)^{k+1}}{1-(1/z)} - z\frac{1-z^{k+1}}{1-z}\right) = \frac{1}{(k+1)(1-z)}\left(\frac{z^{k+1}-1}{z^{k+1}-z^k} - \frac{z-z^{k+2}}{1-z}\right) = \\
&= \frac{1}{(k+1)(1-z)}\left(\frac{z^{k+1}-1}{z^k(z-1)} - \frac{z-z^{k+2}}{1-z}\right) = \frac{1}{(k+1)(1-z)^2}\left(-\frac{z^{k+1}-1}{z^k} - (z-z^{k+2})\right) = \\
&= \frac{1}{(k+1)(1-z)^2}\cdot\frac{-z^{k+1}+1-z^k(z-z^{k+2})}{z^k} = \frac{1}{(k+1)(1-z)^2}\cdot\frac{-z^{k+1}+1-z^{k+1}+z^{2k+2}}{z^k} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(k+1)(1-z)^2} \cdot \frac{-2z^{k+1}+1+z^{2k+2}}{z^k} = \frac{1}{(k+1)(1-z)^2} \cdot \frac{(z^{k+1}-1)^2}{z^k} =$$
$$= \frac{1}{(k+1)z^k}\left(\frac{z^{k+1}-1}{1-z}\right)^2 = \frac{1}{(k+1)z^k}\left(\frac{z^{k+1}-1}{z-1}\right)^2.$$

Il caso $z = 1$ è facile, visto che $D_N(1) = \sum_{n=-N}^{N} 1^n = 2N+1$, per cui, usando anche la formula per la somma $1+2+3+\cdots+k$,

$$F_k(1) = \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} D_N(1) = \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k}(2N+1) = \frac{1}{k+1}\left(2\sum_{N=0}^{k} N + \sum_{N=0}^{k} 1\right) =$$
$$= \frac{1}{k+1}\left(2\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right) = \frac{(k+1)^2}{k+1} = k+1\,.$$

Calcoliamo $F_k(e^{it})$ per $t \in \mathbb{R}$, quando $e^{it} \neq 1$:

$$F_k(e^{it}) = \frac{1}{(k+1)e^{ikt}}\left(\frac{e^{i(k+1)t}-1}{e^{it}-1}\right)^2 = \frac{1}{k+1}\left(e^{-ikt/2}\cdot\frac{e^{i(k+1)t}-1}{e^{it}-1}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{e^{i(1+k/2)t}-e^{-ikt/2}}{e^{it}-1}\right)^2 = (\text{moltiplicando numeratore e denominatore per } e^{-it/2})$$
$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{e^{i(1+k)t/2}-e^{-i(1+k)t/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\right)^2 = (\text{ricordando che } e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2\operatorname{sen}\theta)$$
$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2\operatorname{sen}(1+k)t/2}{2\operatorname{sen} t/2}\right)^2 = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Può consolare la verifica che $F_k(e^{it})$ tende proprio a $F(1)$ per $t \to 0$.
I polinomi trigonometrici sono combinazioni lineari (finite) delle funzioni del tipo $u_n(z) := z^n$, con $n \in \mathbb{Z}$.
È chiaro che l'insieme dei polinomi trigonometrici è uno spazio vettoriale rispetto alla somma. Da questo segue che i nuclei di Dirichlet D_N e quelli di Fejér F_k sono tutti polinomi trigonometrici.
L'integrale di D_N su $\mathbb{U}$ si calcola facilmente interpretandolo come prodotto scalare con la funzione costante $1 = z^0 = u_0(z)$, che è un elemento della base ortonormale hilbertiana $\{u_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$:

$$\int_{\mathbb{U}} D_N\,d\lambda = \int_{\mathbb{U}} D_N \cdot \bar{1}\,d\lambda = (D_N \mid 1) = \left(\sum_{n=-N}^{N} u_n \,\middle|\, 1\right) = \sum_{n=-N}^{N}(u_n \mid u_0) =$$
$$= 0+\cdots+0+1+0+\cdots+0 = 1 \qquad \forall N \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,.$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{U}} F_k\,d\lambda = \int_{\mathbb{U}} \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} D_N\,d\lambda = \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k}\int_{\mathbb{U}} D_N\,d\lambda = \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} 1 = 1\,.$$

Che $F(z)$ sia un numero reale ≥ 0 per ogni $z \in \mathbb{U}$ segue dalla formula che abbiamo trovato per $F(e^{it})$ se $e^{it} \neq 1$, e da quella per $F(1)$ nel caso $z = 1$.
Per dimostrare che $\lim_{k\to+\infty}\sup_{|z-1|>\varepsilon}|F_k(z)| = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ prendiamo $z \in \mathbb{U}$ tale che $|z-1| > \varepsilon > 0$. Allora (notare che necessariamente $z \neq 1$ e che $|z| = 1$)

$$|F_k(z)| = \left|\frac{1}{(k+1)z^k}\left(\frac{z^{k+1}-1}{z-1}\right)^2\right| = \frac{1}{k+1}\left|\frac{z^{k+1}-1}{z-1}\right|^2 \leq \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\left(|z^{k+1}|+1\right)^2}{|z-1|^2} < \frac{1}{k+1}\cdot\frac{2^2}{\varepsilon^2}\,.$$

Dunque

$$\sup_{|z-1|>\varepsilon}\left|F_k(z)\right| \leq \frac{4}{(k+1)\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty\,.$$

c. Vediamo che relazione c'è fra s_N e D_N, usando il fatto che su $\mathbb{U}$ coincidono il coniugato e il reciproco:

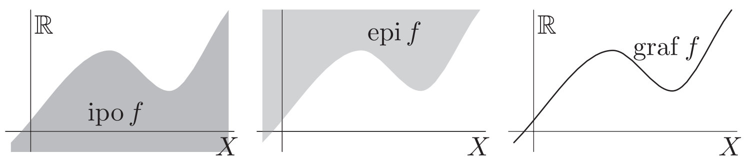
$$\begin{aligned} s_N(z) &= \sum_{n=-N}^{N} \hat f(n) z^n = \sum_{n=-N}^{N} z^n \int_{\mathbb{U}} f(w)\overline{w^n}\, d\lambda(w) = \sum_{n=-N}^{N} z^n \int_{\mathbb{U}} f(w) w^{-n}\, d\lambda(w) = \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \int_{\mathbb{U}} f(w)\Big(\frac{z}{w}\Big)^n d\lambda(w) = \int_{\mathbb{U}} f(w)\bigg(\sum_{n=-N}^{N}\Big(\frac{z}{w}\Big)^n\bigg) d\lambda(w) = \int_{\mathbb{U}} f(w) D_N(z/w)\, d\lambda(w)\,. \end{aligned}$$

A questo punto la relazione fra σ_k e F_k è chiara:

$$\begin{aligned} \sigma_k(z) &= \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} s_N(z) = \frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k}\int_{\mathbb{U}} f(w) D_N(z/w)\, d\lambda(w) = \\ &= \int_{\mathbb{U}} f(w)\bigg(\frac{1}{k+1}\sum_{N=0}^{k} D_N(z/w)\bigg) d\lambda(w) = \int_{\mathbb{U}} f(w) F_k(z/w)\, d\lambda(w)\,. \end{aligned}$$

I risultati del punto **b** e un teorema noto permettono di concludere che σ_k è una successione di polinomi trigonometrici che converge uniformemente a f quando $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ è continua.

2. a. Rammentiamo la definizione di parte intera ("pavimento", o "floor") e di "soffitto" ("parte intera per eccesso", o "ceiling"): dato $t \in \mathbb{R}$ definiamo $\lfloor t \rfloor$ come quell'unico intero relativo tale che $\lfloor t \rfloor \le t < \lfloor t \rfloor + 1$, e definiamo $\lceil t \rceil$ come quell'unico intero relativo tale che $\lceil t \rceil - 1 < t \le \lceil t \rceil$. Si sa che $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ e $t \mapsto \lceil t \rceil$ sono funzioni boreliane (anche se non sono continue), e che



$$\lfloor t \rfloor \le t \le \lceil t \rceil \qquad \text{e} \qquad 0 \le \lceil t \rceil - \lfloor t \rfloor \le 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ definiamo

$$g_n(x) := 2^{-n}\lfloor 2^n f(x) \rfloor\,, h_n(x) := 2^{-n}\lceil 2^n f(x) \rceil$$

per $x \in X$. Si vede subito che

$$g_n \le f \le h_n \qquad \text{e} \qquad 0 \le h_n - g_n \le 2^{-n}\,,$$

per cui in particolare $g_n \nearrow f$ e $h_n \searrow f$ per $n \to +\infty$. Notare che g_n e h_n hanno valori in $2^{-n}\mathbb{Z}$, un insieme numerabile. Inoltre per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, poiché $g_n(x) \nearrow f(x)$,

$$t < f(x) \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad t < g_n(x)\,,$$

per cui

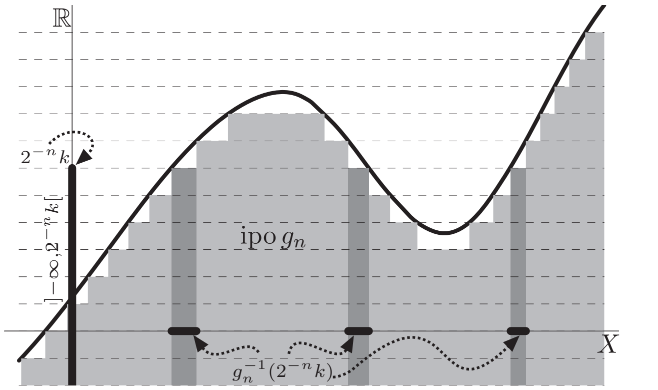
$$\begin{aligned} \operatorname{ipo} f &= \big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,\big|\, t < f(x)\big\} = \big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,\big|\, \exists n \in \mathbb{N} \quad t < g_n(x)\big\} = \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,\big|\, t < g_n(x)\big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ipo} g_n\,. \end{aligned}$$

Ancora, usando il fatto che g_n ha valori in $2^{-n}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ipo} g_n &= \big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,\big|\, t < g_n(x)\big\} = \big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,\big|\, \exists k \in \mathbb{Z}\ g_n(x) = 2^{-n}k \text{ e } t < 2^{-n}k\big\} = \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,\big|\, g_n(x) = 2^{-n}k \text{ e } t < 2^{-n}k\big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} g_n^{-1}\big(\{2^{-n}k\}\big) \times \left]-\infty, 2^{-n}k\right[\,. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\operatorname{epi} f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{epi} h_n\,, \qquad \text{ed} \qquad \operatorname{epi} h_n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h_n^{-1}\big(\{2^{-n}k\}\big) \times \,]2^{-n}k, +\infty[\,.$$



Supponiamo ora che f sia misurabile. Allora g_n è pure misurabile, in quanto composizione di f con la funzione boreliana $t \mapsto 2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor$. Dunque ipo f è in $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ in quanto

$$\begin{aligned}\operatorname{ipo} f &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ipo} g_n = \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{g_n^{-1}\big(\{2^{-n}k\}\big)}_{\in\mathcal{M}} \times \underbrace{]-\infty, 2^{-n}k[}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\,.\end{aligned}$$

Supponiamo viceversa che ipo f appartenga alla σ-algebra prodotto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vogliamo dimostrare che f è misurabile, cioè che $\{f > c\} \in \mathcal{M}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in X$, $c \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$f(x) > c \quad\iff\quad (x, c) \in \operatorname{ipo} f \quad\iff\quad x \in \big\{y \in X \;\big|\; (y, c) \in \operatorname{ipo} f\big\}\,.$$

L'insieme $\{y \in X \mid (y, c) \in \operatorname{ipo} f\}$ è la sezione orizzontale dell'ipo f a quota c, e quindi è $\mathcal{M}$-misurabile per le note proprietà delle σ-algebre prodotto. La dimostrazione che f è misurabile se e solo se epi $f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è analoga.
Se f è misurabile, allora graph f è in $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ perché

$$\operatorname{graph} f = (X \times \mathbb{R}) \setminus \big(\operatorname{epi} f \cup \operatorname{ipo} f\big)\,.$$

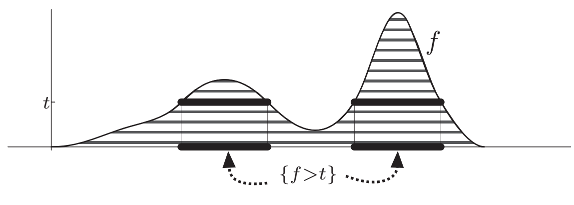
Se poi μ è σ-finita ha senso considerare la misura prodotto $\mu \otimes \lambda$, e il suo valore sull'insieme graph f si può calcolare per sezioni verticali:

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \lambda)(\operatorname{graph} f) &= \int_X \lambda\big(\{t \in \mathbb{R} \mid (x, t) \in \operatorname{graph} f\}\big) d\mu(x) = \int_X \lambda\big(\{t \in \mathbb{R} \mid t = f(x)\}\big) d\mu(x) = \\ &= \int_X \lambda\big(\{f(x)\}\big) d\mu(x) = \int_X 0 d\mu(x) = 0\,.\end{aligned}$$

Problema. Da graph $f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ segue necessariamente che f è misurabile? (Non lo so).

b. Sia μ σ-finita e f misurabile e ≥ 0. Allora in particolare ipo $f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ per il punto precedente, e quindi anche

$$\begin{aligned}\operatorname{ipo}_0 f &= \big\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \;\big|\; 0 < t < f(x)\big\} = \\ &= \operatorname{ipo} f \cap \big(X \times \,]0, +\infty[\big) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\,.\end{aligned}$$



Calcoliamo $(\mu \otimes \lambda)(\operatorname{ipo}_0 f)$ prima per sezioni verticali:

$$\begin{aligned}&(\mu \otimes \lambda)(\operatorname{ipo}_0 f) = \\ &= \int_X \lambda\big(\{t \in \mathbb{R} \mid (x, t) \in \operatorname{ipo}_0 f\}\big)\, d\mu(x) = \\ &= \int_X \lambda\big(]0, f(x)[\big)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x) = \\ &= \int_X f\, d\mu\,.\end{aligned}$$

Calcoliamolo ora per sezioni orizzontali:

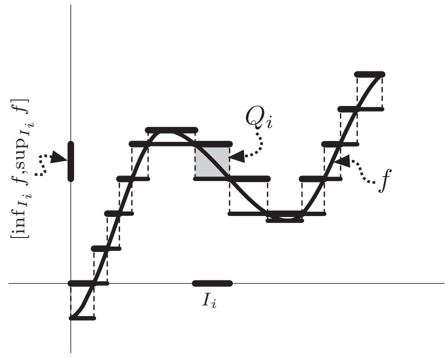
$$(\mu\otimes\lambda)(\mathrm{ipo}_0 f) = \int_{\mathbb{R}} \mu\big(\{x\in X \mid (x,t)\in \mathrm{ipo}_0 f\}\big)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mu\big(\{x\in X \mid 0<t<f(x)\}\big)\,dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x\in X \mid t<f(x)\}\big)\,dt\,.$$

Uguagliando i due risultati otteniamo

$$\int_X f\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x\in X \mid t<f(x)\}\big)\,dt\,.$$

c. Siano $X=[0,1]$ e $f\geq 0$. Supponiamo che f sia integrabile secondo Riemann su $[0,1]$. In particolare f è limitata. Fissato $\varepsilon>0$ esistono n intervalli $I_1,I_2,\dots,I_n$ a due a due disgiunti e la cui unione è $[0,1]$ tali che

$$\sum_{i=1}^n\Big(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\Big)\lambda(I_i) < \varepsilon\,.$$

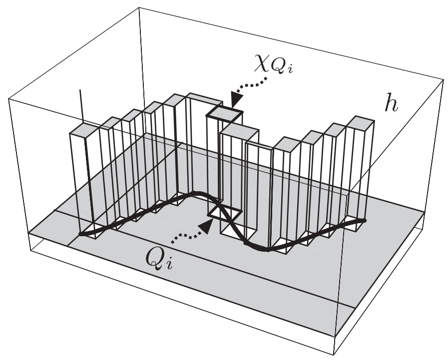


Gli insiemi

$$Q_i := I_i\times\big[\inf_{I_i} f, \sup_{I_i} f\big]\,,$$

sono rettangoli (scatole) a due a due disgiunti e limitati, e la cui unione contiene il grafico di f. Definiamo le due funzioni $g,h\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ come

$$g\equiv 0\,,\qquad h:=\sum_{i=1}^n \chi_{Q_i} = \chi_{\bigcup_i Q_i}\,.$$



È chiaro che g ed h sono a gradino in due dimensioni e che $g\leq\chi_{\mathrm{graph}\,f}\leq h$, e poi

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}}(g-h)\,d(\lambda\otimes\lambda) = \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} h\,d(\lambda\otimes\lambda) =$$
$$= (\lambda\otimes\lambda)\Big(\bigcup_i Q_i\Big) = \sum_{i=1}^n\Big(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\Big)\lambda(I_i) < \varepsilon\,.$$

Quindi $\chi_{\mathrm{graph}\,f}$ è integrabile secondo Riemann su $[0,1]\times\mathbb{R}$. Inoltre

$$0=\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} g\,d(\lambda\otimes\lambda) \leq \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \chi_{\mathrm{graph}\,f}\,d(\lambda\otimes\lambda) \leq \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} h\,d(\lambda\otimes\lambda) < \varepsilon\,,$$

per cui

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \chi_{\mathrm{graph}\,f}\,d(\lambda\otimes\lambda) = 0\,.$$

Per dimostrare che il viceversa è falso, sia f la funzione di Dirichlet, che come noto non è integrabile secondo Riemann:

$$f(x) := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0 & \text{se } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Il grafico di f è contenuto nell'unione dei due rettangoli (degeneri) disgiunti $[0,1]\times\{0\}$ e $[0,1]\times\{1\}$. Se poniamo

$$g\equiv 0\,,\qquad h:=\chi_{[0,1]\times\{0\}}+\chi_{[0,1]\times\{1\}}$$

allora g ed h sono funzioni a gradino in due dimensioni, $g\leq\chi_{\mathrm{graph}\,f}\leq h$ e

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}}(h-g)\,d(\lambda\otimes\lambda) = \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} h\,d(\lambda\otimes\lambda) = (\lambda\otimes\lambda)\big([0,1]\times\{0\}\big)+(\lambda\otimes\lambda)\big([0,1]\times\{1\}\big) = 0\,,$$

per cui $\chi_{\mathrm{graph}\,f}$ risulta integrabile secondo Riemann in due dimensioni.