Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 13 luglio 1999

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Sia H uno spazio di Hilbert, e $\{M_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ una successione di sottospazi vettoriali chiusi tali che $M_k \subseteq M_{k+1}$ e la cui unione è densa in H. Sia $P_k\colon H \to M_k$ la proiezione ortogonale su M_k. Le convergenze di cui parleremo saranno sempre rispetto alla norma di H.

a. Per ogni $x \in H$ la successione $P_k x$ converge a x.

b. Sia z_k una successione in H tale che $P_k z_{k+1} = z_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che si equivalgono: (i) z_k è limitata; (ii) z_k converge a un vettore z tale che $P_k z = z_k$ per ogni k. (Telescopizzare $z_k = z_0 + (z_1 - z_0) + \cdots + (z_k - z_{k-1})$; gli addendi sono ortogonali fra loro).

c. Siano $x_n, z_k \in H$ due successioni in H tali che $z_k = \lim_{n\to+\infty} P_k x_n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che si equivalgono: (i) x_n converge; (ii) x_n e z_k convergono allo stesso vettore; (iii) x_n è limitata e $\lim_{k\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_k x_n - x_n\| = 0$.

d. Supponiamo che M_k abbia dimensione finita per ogni $k \in \mathbb{N}$ e che x_n sia una successione in H. Allora si equivalgono (i) da ogni sottosuccessione di x_n si può estrarre una sottosuccessione convergente; (ii) x_n è limitata e $\lim_{k\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_k x_n - x_n\| = 0$.

2. Poniamo

$$f(x) := \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \cos(t^3)\, dt\,.$$

a. Dimostrare che $f(x)$ è ben definita per $x > 0$ e che è una funzione di classe C^∞.

b. Mostrare che $f'(x) = -(2x/3)\int_0^{+\infty} te^{-xt^2} \operatorname{sen} t^3\, dt$ e che f è una soluzione dell'equazione differenziale $9f''(x) = 9f'(x)/x + 2x(f(x) + 2xf'(x))$.
(Integrare per parti; calcolare f'' a partire dall'ultima formula).

c. Dimostrare che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, anzi, che $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/x} + O(x^{-7/2})$.
(Cambio di variabile $t\sqrt{x} = u$ e formula di Taylor per il coseno).

d. Posto $h(u,x) := e^{-xu^{2/3}}/(3u^{2/3})$, mostrare che

$$f(x) = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} e^{-xt^2} \cos t^3\, dt + \frac{\partial h}{\partial u}(\pi, x) - \int_\pi^{+\infty} (\cos u) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,x)\, du\,,$$

e dedurne che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \cos t^3\, dt$, che è un numero reale finito.
(Cambio di variabili $u = t^3$, due integrazioni per parti, limite $x \to 0^+$, e tornare indietro).

Punti: 5+10+10+20, 5+10+10+20

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 13 luglio 1999

Svolgimento

1. a. Poiché la successione dei sottospazi M_k è crescente, la quantità $\|x - P_k x\|$, che coincide con la distanza fra x e M_k, è decrescente e ≥ 0:

$$0 \leq \|x - P_{k+1}x\| = \operatorname{dist}(x, M_{k+1}) \leq \operatorname{dist}(x, M_k) = \|x - P_k x\| \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Poiché l'unione dei sottospazi H_k è densa in H, esiste una successione $x_n \in M_{k_n}$ tale che $x_n \to x$ per $n \to +\infty$. Allora

$$\|x - P_{k_n}x\| = \operatorname{dist}(x, M_{k_n}) \leq \|x - x_n\| \longrightarrow 0 \text{ per } n \to +\infty\,.$$

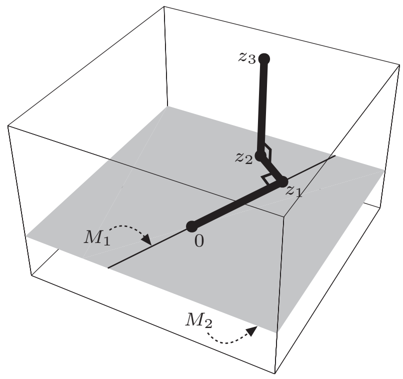
Una successione decrescente ha per limite l'estremo inferiore. Quindi

$$0 \leq \lim_{k\to+\infty}\|x - P_k x\| = \inf_{k\in\mathbb{N}}\|x - P_k x\| \leq \min\lim_{n\to+\infty}\|x - P_{k_n}x\| \leq \min\lim_{n\to+\infty}\|x - x_n\| = \lim_{n\to+\infty}\|x - x_n\| = 0\,.$$

Concludiamo che $P_k x \to x$ per $k \to +\infty$.

b. Telescopizziamo z_k:

$$z_k = z_0 + (z_1 - z_0) + \cdots + (z_k - z_{k-1})\,.$$



Gli addendi della somma telescopica sono ortogonali fra loro. Prendiamo infatti un termine generico (escluso z_0) $z_n - z_{n-1}$, e dimostriamo che è ortogonale a tutti i termini precedenti. Dato che z_{n-1} è la proiezione ortogonale di z_n su M_{n-1} abbiamo che

$$z_n - z_{n-1} \perp M_{n-1}\,.$$

Tutti i vettori z_0, $z_1 - z_0$, $\ldots z_{n-1} - z_{n-2}$ appartengono a M_{n-1}, essendo combinazioni lineari di vettori di $M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_{n-1} = M_{n-1}$. Quindi $z_n - z_{n-1}$ è davvero ortogonale a tutti loro.
Ora alla somma di termini fra loro ortogonali possiamo applicare il teorema di Pitagora:

$$\|z_k\|^2 = \|z_0\|^2 + \|z_1 - z_0\|^2 + \|z_2 - z_1\|^2 + \cdots + \|z_k - z_{k-1}\|^2 = \|z_0\|^2 + \sum_{n=1}^{k}\|z_n - z_{n-1}\|^2\,.$$

Il secondo membro è la somma parziale di una serie. Quindi

la serie reale $\quad \|z_0\|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\|z_k - z_{k-1}\|^2 \quad$ converge se e solo se la successione z_k è limitata.

Per le proprietà delle serie di vettori ortogonali in uno spazio di Hilbert deduciamo che

la serie vettoriale $\quad z_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(z_k - z_{k-1}) \quad$ converge se e solo se la successione z_k è limitata.

Poiché la successione delle somme parziali della serie vettoriale non è altro che la successione z_k, abbiamo che

la successione vettoriale z_k converge se e solo è limitata.

Rimane da dimostrare che l'eventuale limite z di z_k ha la proprietà che $z_k = P_k z$. Sia $n > k$:

$$z_n = \underbrace{z_k}_{\in M_k} + \underbrace{(z_{k+1} - z_k) + \cdots + (z_n - z_{n-1})}_{\perp M_k} .$$

Quindi

$$P_k z_n = z_k \qquad \forall n > k .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ e ricordando che P_k è continua:

$$P_k z = z_k \qquad \forall k \in \mathbb{N} .$$

c. **(i) implica (ii)**. Supponiamo che x_n converga ad un vettore x. Allora $z_k = \lim_{n\to+\infty} P_k x_n = P_k x$. Ora z_k tende pure a x per il punto **a**.

(ii) implica (iii). Supponiamo che x_n e z_k tendano a un vettore x. È ovvio che x_n è limitata. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\|P_k x_n - x_n\| &\le \|P_k x_n - P_k x\| + \|P_k x - x\| + \|x - x_n\| = \\ &= \underbrace{\|P_k(x_n - x)\|}_{\le \|x_n - x\|} + \|P_k x - x\| + \|x - x_n\| \le \\ &\le 2\|x - x_n\| + \|P_k x - x\| .\end{aligned}$$

Sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|x - x_n\| < \varepsilon/4$ per ogni $n \ge n_\varepsilon$. Sia anche $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|P_k x - x\| < \varepsilon/2$ per ogni $k \ge k_\varepsilon$ (ancora il punto **a**). Allora

$$\|P_k x_n - x_n\| < \varepsilon \qquad \forall n \ge n_\varepsilon \quad \forall k \ge k_\varepsilon .$$

Per ogni n fissato abbiamo che $\lim_{k\to+\infty} \|P_k x_n - x_n\| = 0$, ancora una volta per il punto **a**. Quindi esiste un $k_{n,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|P_k x_n - x_n\| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \ge k_{n,\varepsilon} .$$

Poniamo

$$\bar{k}_\varepsilon := \max\{k_\varepsilon, k_{0,\varepsilon}, k_{1,\varepsilon}, \ldots, k_{n_\varepsilon,\varepsilon}\} .$$

Allora

$$\|P_k x_n - x_n\| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \ge \bar{k}_\varepsilon , \qquad \text{cioè} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_k x_n - x_n\| \le \varepsilon \qquad \forall k \ge \bar{k}_\varepsilon .$$

Concludiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_k x_n - x_n\| = 0 .$$

(iii) implica (i). Supponiamo quindi che x_n sia limitata e che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_k x_n - x_n\|$ sia infinitesimo per $k \to +\infty$. Anche la successione z_k è limitata perché $\|z_k\| = \lim_{n\to+\infty} \|P_k x_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_k x_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$. Inoltre $P_k z_{k+1} = z_k$, perché

$$P_k z_{k+1} = P_k\Big(\lim_{n\to+\infty} P_{k+1} x_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P_k(P_{k+1} x_n) = \lim_{n\to+\infty} P_k x_n = z_k$$

(P_k è continua, e $P_k P_{k+1} = P_k$ perché $M_k \subseteq M_{k+1}$). Per il punto **b** la successione z_k converge a uno $z \in H$. Dimostriamo che anche x_n tende a z. Scriviamo

$$\begin{aligned}\|z - x_n\| &\le \|z - z_k\| + \|z_k - P_k x_n\| + \|P_k x_n - x_n\| \le \\ &\le \|z - z_k\| + \|z_k - P_k x_n\| + \sup_{m\in\mathbb{N}} \|x_m - P_k x_m\| .\end{aligned}$$

Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \big\| x_m - P_k x_m \big\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq k_\varepsilon \,.$$

Poiché $z_k \to z$ esiste $k'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\big\| z - z_k \big\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq k'_\varepsilon \,.$$

Posto $\bar{k} := \max\{k_\varepsilon, k'_\varepsilon\}$ abbiamo per ipotesi che $z_{\bar{k}} = \lim_{n\to+\infty} P_{\bar{k}} x_n$, per cui esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\big\| z_{\bar{k}} - P_{\bar{k}} x_n \big\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \,.$$

Raduniamo i pezzi:

$$\big\| z - x_n \big\| \leq \big\| z - z_{\bar{k}} \big\| + \big\| z_{\bar{k}} - P_k x_n \big\| + \sup_{m\in\mathbb{N}} \big\| x_m - P_{\bar{k}} x_m \big\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \,.$$

Dunque x_n in effetti converge a z.

d. **(i) implica (ii)**. Supponiamo che da ogni sottosuccessione di x_n si possa estrarre una sottosuccessione convergente. Allora x_n deve essere limitata, perché se fosse illimitata esisterebbe una sottosuccessione x_{n_k} tale che $\|x_{n_k}\| \to +\infty$, e da questa x_{n_k} non potremmo estrarre alcuna sottosuccessione convergente. Supponiamo per assurdo che

$$\max_{k\to+\infty} \lim \sup_{n\in\mathbb{N}} \big\| P_k x_n - x_n \big\| > r > 0 \,.$$

Esiste allora una sottosuccessione di sottospazi M_{k_i} tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \big\| P_{k_i} x_n - x_n \big\| > r > 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N} \,.$$

Per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste $n_i \in \mathbb{N}$ tale che

$$\big\| P_{k_i} x_{n_i} - x_{n_i} \big\| > r \qquad \forall i \in \mathbb{N} \,.$$

Non è detto che x_{n_i} sia una sottosuccessione di x_n, in quanto non c'è garanzia che $i \mapsto n_i$ sia strettamente crescente. Però esiste certamente una successione strettamente crescente $m \mapsto i_m$ da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ tale che $x_{n_{i_m}}$ converge per $m \to +\infty$. Infatti o l'insieme

$$I := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

è finito o è infinito. Nel primo caso almeno un valore di n_i è assunto per infiniti i, per cui possiamo scegliere i_m strettamente crescente in modo che n_{i_m} sia costante, per cui $m \mapsto x_{n_{i_m}}$ risulta convergente perché costante. Se invece I è infinito allora possiamo porre per esempio

$$i_0 := \min\big\{ j \in \mathbb{N} \bigm| n_j \in I \big\} \,, \qquad i_{m+1} := \min\big\{ j \in \mathbb{N} \bigm| j > i_m \,,\ n_j \in I \,,\ n_j > \max\{n_{i_0}, n_{i_1}, \ldots, n_{i_m}\} \big\} \,.$$

Le successioni $m \mapsto i_m$ e $m \mapsto n_{i_m}$ sono ora strettamente crescenti e la seconda è a valori in I. La successione vettoriale $m \mapsto x_{n_{i_m}}$ è una sottosuccessione di $n \mapsto x_n$, quindi per ipotesi possiamo estrarne un'ulteriore sottosuccessione convergente, che indichiamo per semplicità ancora con lo stesso simbolo. Allora

$$\big\| P_{k_{i_m}} x_{n_{i_m}} - x_{n_{i_m}} \big\| > r \qquad \forall m \in \mathbb{N} \,, \qquad \text{per cui} \qquad \sup_{s\in\mathbb{N}} \big\| P_{k_{i_m}} x_{n_{i_s}} - x_{n_{i_s}} \big\| > r > 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N} \,.$$

Insomma

$$\text{non è vero che} \qquad \lim_{k\to+\infty} \sup_{s\in\mathbb{N}} \big\| P_k x_{n_{i_s}} - x_{n_{i_s}} \big\| = 0 \,.$$

Il punto **c** porta a concludere che $m \mapsto x_{n_{i_m}}$ non può convergere, contro quanto avevamo già stabilito, assurdo.
(ii) implica (i). Al contrario dell'implicazione precedente, avremo bisogno che i sottospazi M_k siano a dimensione finita. Cominciamo col vedere che esiste una sottosuccessione $n \mapsto x_{\varphi(n)}$ tale che $n \mapsto P_k x_{\varphi(n)}$ converga per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ricordiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $n \mapsto P_k x_n$ è a valori nello spazio normato M_k, che è a dimensione finita. Quindi per ogni k esiste una $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $n \mapsto P_k x_{\psi_k(n)}$ converge. Il problema è scegliere ψ_k in modo che non dipenda da k. Usiamo il cosiddetto *"ragionamento diagonale"*. Partiamo da $k = 0$ e prendiamo $\varphi_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che

$$n \mapsto P_0 x_{\varphi_0(n)} \quad \text{converge in } M_0 \subseteq H\,.$$

Ora la successione $n \mapsto P_1 x_{\varphi_0(n)}$ è limitata nello spazio M_1, quindi esiste $\varphi_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che

$$n \mapsto P_1 x_{\varphi_0(\varphi_1(n))} \quad \text{converge in } M_1 \subseteq H\,.$$

Di nuovo, la successione $n \mapsto P_2 x_{\varphi_0(\varphi_1(n))}$ è limitata nello spazio M_2, quindi esiste $\varphi_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$n \mapsto P_2 x_{\varphi_0(\varphi_1(\varphi_2(n)))} \quad \text{converge in } M_2 \subseteq H\,.$$

Continuando così per ogni $k \in \mathbb{N}$ troviamo una $\varphi_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che

$$n \mapsto P_k x_{\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)} \quad \text{converge in } M_k \subseteq H\,.$$

Poniamo

$$\varphi(n) := \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

(notare che n compare sia nell'argomento finale che nel numero di composizioni). Allora φ è strettamente crescente:

$$\begin{aligned}\varphi(n+1) &= \underbrace{\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n}_{\text{str. cresc.}} \circ \underbrace{\varphi_{n+1}(n+1)}_{\geq n+1 > n} > \\ &> \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) = \\ &= \varphi(n)\,,\end{aligned}$$

perché se $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente allora $\psi(n) \geq n$ per ogni n, e la composizione (di un numero fisso) di funzioni strettamente crescenti è strettamente crescente. Poi $n \mapsto \varphi(n)$ è definitivamente una sottosuccessione di $\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k$ per ogni k fissato:

$$\varphi(n) = \big(\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k\big) \circ \underbrace{\big(\varphi_{k+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n)\big)}_{\text{str. cresc. in } n} \qquad \forall n > k\,.$$

Quindi in effetti

$$P_k x_{\varphi(n)} \quad \text{converge per } n \to +\infty \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$z_k := \lim_{n \to +\infty} P_k x_{\varphi(n)}\,.$$

Per ipotesi abbiamo

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \big\| P_k x_n - x_n \big\| = 0\,.$$

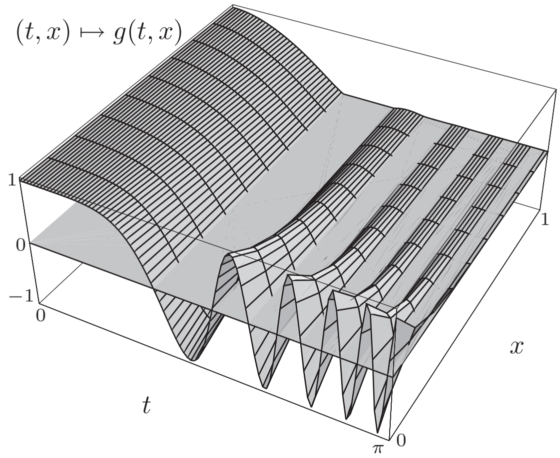
A maggior ragione

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \big\| P_k x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \big\| = 0\,.$$

Ovviamente $n \mapsto x_{\varphi(n)}$ è limitata. Per il punto **c** concludiamo che $n \mapsto x_{\varphi(n)}$ converge, come volevasi dimostrare.

2. a. Poniamo

$$g(t,x) := e^{-xt^2}\cos(t^3) \qquad \text{per } x,t \in \mathbb{R}\,.$$



Dobbiamo studiare l'integrale dipendente da parametro

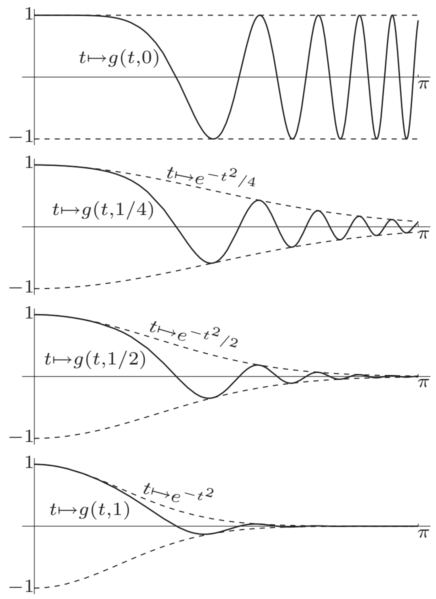
$$f(x) := \int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt\,.$$

Si maggiora banalmente il coseno con 1:

$$\big|g(t,x)\big| \le e^{-xt^2}\,.$$

Chiaramente g è continua nella coppia delle variabili. Per il suo andamento asintotico la funzione $t \mapsto e^{-xt^2}$ è in $L^1([0,+\infty[)$ per ogni $x>0$ fissato. Quindi la $f(x)$ è ben definita per $x>0$. Per stabilire se f è continua proviamo dapprima maggiorando con l'estremo superiore fatto su tutti gli $x>0$: usando il fatto che la funzione $x \mapsto |g(t,x)|$ è decrescente e continua per ogni t,

$$\sup_{x>0}\big|g(t,x)\big| = \sup_{x>0}\big|e^{-xt^2}\cos(t^3)\big| = \big|g(t,0)\big| = \big|\cos(t^3)\big| \notin L^1([0,+\infty[)\,.$$



Il primo tentativo è fallito. Proviamo maggiorando sugli $x \ge x_0 > 0$:

$$\sup_{x\ge x_0}\big|g(t,x)\big| = \sup_{x>x_0}\big|e^{-xt^2}\cos(t^3)\big| = \big|g(t,x_0)\big| \le$$
$$\le e^{-x_0t^2} \in L^1([0,+\infty[)\,.$$

Dunque f è continua su $[x_0,+\infty[$ per ogni $x_0>0$, e quindi è continua su tutto $]0,+\infty[$. Il comportamento per $x \to 0^+$ sarà studiato nel punto **d**. Per decidere la derivabilità calcoliamo la derivata parziale n-esima di $g(t,x)$ rispetto a x, che ha una formula facile ed è ovviamente continua nella coppia delle variabili:

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x) = (-1)^n t^{2n} e^{-xt^2}\cos(t^3)\,.$$

Di nuovo, per $x_0>0$,

$$\sup_{x\ge x_0}\Big|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x)\Big| = \Big|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x_0)\Big| \le$$
$$\le t^{2n}e^{-x_0t^2} \in L^1([0,+\infty[) \quad \forall x_0>0\,,$$

da cui si deduce che f è di classe C^∞ su $]0,+\infty[$.

b. Dal punto precedente ricaviamo che

$$f'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\,dt = \int_0^{+\infty} -t^2e^{-xt^2}\cos(t^3)\,dt\,.$$

Osservando che $t \mapsto t^2\cos(t^3)$ è la derivata di $t \mapsto (1/3)\,\mathrm{sen}(t^3)$, integriamo per parti:

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}t^2\cos(t^3)\,dt = -\Big[e^{-xt^2}\frac{\mathrm{sen}(t^3)}{3}\Big]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(t^3)}{3}(-2xt)e^{-xt^2}\,dt =$$
$$= -\frac{2x}{3}\int_0^{+\infty} te^{-xt^2}\,\mathrm{sen}(t^3)\,dt\,.$$

L'integrale dell'ultima formula si può derivare tranquillamente rispetto a x perché per $x_0 > 0$

$$\sup_{x \geq x_0} \left| \frac{\partial}{\partial x} t e^{-xt^2} \operatorname{sen}(t^3) \right| = \sup_{x \geq x_0} \left| -t^3 e^{-xt^3} \operatorname{sen}(t^3) \right| \leq t^3 e^{-x_0 t^2} \in L^1([0, +\infty[) \, .$$

Calcoliamo f'' dalla nuova formula per f':

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2x}{3} \int_0^{+\infty} t e^{-xt^2} \operatorname{sen}(t^3) \, dt \right) = \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^{+\infty} t e^{-xt^2} \operatorname{sen}(t^3) \, dt - \frac{2x}{3} \int_0^{+\infty} -t^3 e^{-xt^2} \operatorname{sen}(t^3) \, dt = \\ &= \frac{f'(x)}{x} - \frac{2x}{3} \int_0^{+\infty} -t^3 e^{-xt^2} \operatorname{sen}(t^3) \, dt \, . \end{aligned}$$

Integriamo per parti l'ultimo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} -t^3 e^{-xt^2} \operatorname{sen}(t^3) \, dt &= \int_0^{+\infty} \big(t e^{-xt^2}\big)\big(-t^2 \operatorname{sen}(t^3)\big) \, dt = \\ &= \left[\big(t e^{-xt^2}\big) \frac{\cos(t^3)}{3} \right]_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t^3)}{3} \big(e^{-xt^2} - 2t^2 x e^{-xt^2} \big) \, dt = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \cos(t^3) \, dt - \frac{2x}{3} \int_0^{+\infty} -t^2 e^{-xt^2} \cos(t^3) \, dt = \\ &= -\frac{1}{3} f(x) - \frac{2x}{3} f'(x) \, . \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione per $f''(x)$ abbiamo

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{2x}{3} \Big(-\frac{1}{3} f(x) - \frac{2x}{3} f'(x) \Big) \, , \qquad \text{cioè} \qquad 9f''(x) = \frac{9f'(x)}{x} + 2x\big(f(x) + 2x f'(x)\big) \, .$$

c. Il limite puntuale di $g(t,x)$ per $x \to +\infty$ è presto calcolato:

$$\lim_{x \to +\infty} g(t,x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-xt^2} \cos(t^3) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0, \\ 0 & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Per quanto abbiamo già visto, $\sup_{x \geq x_0} |g(t,x)|$ è in $L^1([0, +\infty[)$ se $x_0 > 0$. Per il teorema della convergenza dominata possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} g(t,x) \, dt = \int_0^{+\infty} \Big(\lim_{x \to +\infty} g(t,x) \Big) dt = \int_0^{+\infty} \chi_{\{0\}}(t) \, dt = 0 \, .$$

Per valutare meglio l'andamento per $x \to +\infty$, proviamo a scaricare sul coseno la dipendenza da x che era nell'esponenziale, col cambio di variabile $t\sqrt{x} = u$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \cos(t^3) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \Big(\cos \frac{u^3}{x^{3/2}} \Big) \frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \cos \frac{u^3}{x^{3/2}} \, du \, .$$

Ora per $x \to +\infty$ l'integranda tende a e^{-u^2}. Aggiungendo e togliendo 1 e distribuendo l'integrale sulla somma (dopo aver controllato che ciascuno degli integrali risultanti converga) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \left(\cos \frac{u^3}{x^{3/2}} - 1 \right) du = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \left(\cos \frac{u^3}{x^{3/2}} - 1 \right) du \, . \end{aligned}$$

Rimane da valutare l'ultimo integrale. Usiamo la formula di Taylor col resto di Lagrange:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + f'\varphi(0)t + \frac{\varphi''(\xi)}{2!}t^2 \qquad \text{per un qualche } \xi \in \,]0, t[\,.$$

Sostituendo $\varphi = \cos$,

$$\cos t = \cos 0 + (-\operatorname{sen} 0)t + \frac{-\cos\xi}{2!}t^2 = 1 + \frac{-\cos\xi}{2!}t^2\,,$$

da cui

$$0 \geq \cos t - 1 = \frac{-\cos\xi}{2!}t^2 \geq -\frac{t^2}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Applichiamo la disuguaglianza all'integrando:

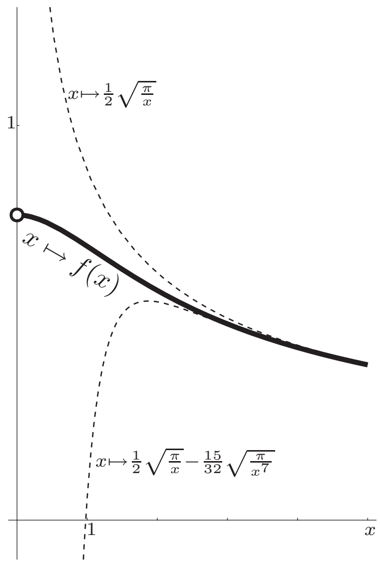
$$0 \geq e^{-u^2}\Big(\cos\frac{u^3}{x^{3/2}} - 1\Big) \geq -e^{-u^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{u^3}{x^{3/2}}\Big)^2 = -\frac{u^6 e^{-u^2}}{2x^3}\,.$$

Tornando alla nostra stima asintotica:

$$0 \geq f(x) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \geq -\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{u^6 e^{-u^2}}{2x^3}\,du = -\frac{1}{2x^{7/2}}\int_0^{+\infty} u^6 e^{-u^2}\,du\,.$$

L'integrale $\int_0^{+\infty} u^6 e^{-u^2}\,du$ è finito, anzi, col cambio di variabile $u^2 = y$ e la funzione Gamma si calcola esplicitamente:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} u^6 e^{-u^2}\,du &= \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y}\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^{5/2}e^{-y}\,dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^{7/2-1}e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{7}{2}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{5}{2}+1\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big) = \\
&= \frac{5}{4}\Gamma\Big(\frac{3}{2}+1\Big) = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{15}{8}\Gamma\Big(\frac{1}{2}+1\Big) = \\
&= \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{15}{16}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \\
&= \frac{15\sqrt{\pi}}{16}\,.
\end{aligned}$$



In definitiva

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{15}{32}\sqrt{\frac{\pi}{x^7}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \qquad \forall x > 0\,.$$

d. Per $x \to 0^+$ la funzione integranda $g(t,x)$ non è sempre positiva e tende a $t \mapsto \cos t^3$, che non è in $L^1([0,+\infty[)$, e quindi non si applica nessuno dei teoremi noti di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Si può comunque aggirare il problema rimaneggiando l'integrale. L'esperienza con integrali più semplici, tipo $\int(\operatorname{sen} x)/x\,dx$, suggerisce di cominciare spezzando l'intervallo di integrazione, separando i due problemi distinti del comportamento per $t \to 0^+$ da quello per $t \to +\infty$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} g(t,x)\,dt + \int_{\sqrt[3]{\pi}}^{+\infty} g(t,x)\,dt\,.$$

(La scelta di $\sqrt[3]{\pi}$ come estremo semplifica leggermente le formule successive). Il primo integrale non dà problemi di passaggio al limite per $x \to 0^+$ perché l'integranda è continua e limitata su un intervallo limitato. Occupiamoci del secondo integrale: cambiamo variabile $u = t^3$:

$$\int_{\sqrt[3]{\pi}}^{+\infty} g(t,x)\,dt = \int_{\sqrt[3]{\pi}}^{+\infty} e^{-xt^2}\cos(t^3)\,dt = \int_{\pi}^{+\infty} e^{-xu^{2/3}}(\cos u)\frac{1}{3}u^{-2/3}du = \int_{\pi}^{+\infty}\frac{e^{-xu^{2/3}}}{3u^{2/3}}(\cos u)\,du\,.$$

Non si può ancora passare al limite per $x \to 0^+$. Poniamo

$$h(u,x) := \frac{e^{-xu^{2/3}}}{3u^{2/3}}\,,$$

di modo che

$$\int_{\sqrt[3]{\pi}}^{+\infty} g(t,x)\,dt = \int_{\pi}^{+\infty} h(u,x)(\cos u)\,du\,,$$

e integriamo per parti una prima volta:

$$\int_{\pi}^{+\infty} h(u,x)(\cos u)\,du = \big[h(u,x)\,\mathrm{sen}\,u\big]_{u=\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} (\mathrm{sen}\,u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,x)\,du = -\int_{\pi}^{+\infty} (\mathrm{sen}\,u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,x)\,du\,.$$

La derivata parziale $\partial h/\partial u$ è esplicitamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial u}(u,x) &= \frac{-(2/3)xu^{-1/3}e^{-xu^{2/3}}\cdot 3u^{2/3} - e^{-xu^{2/3}}\cdot 3(2/3)u^{-1/3}}{9u^{4/3}} = \\ &= -2\frac{xu^{2/3}+1}{9u^{5/3}}e^{-xu^{2/3}}\end{aligned}$$

che non ha comportamento integrabile per $t \to +\infty$ quando $x = 0$, per cui non si può ancora passare al limite per $x \to 0^+$. Proviamo a integrare per parti una seconda volta:

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{+\infty} h(u,x)(\cos u)\,du &= -\int_{\pi}^{+\infty} (\mathrm{sen}\,u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,x)\,du = \\ &= -\Big[(-\cos u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,x)\Big]_{u=\pi}^{+\infty} + \int_{\pi}^{+\infty} (-\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,x)\,du = \\ &= \frac{\partial h}{\partial u}(\pi,x) - \int_{\pi}^{+\infty} (\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,x)\,du\,.\end{aligned}$$

La derivata parziale seconda $\partial^2 h/\partial u^2$ è

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,x) &= -2\frac{(2/3)xu^{-1/3}\cdot 9u^{5/3} - (xu^{2/3}+1)\cdot 9(5/3)u^{2/3}}{81u^{10/3}}e^{-xu^{2/3}} - \\ &\quad -2\frac{xu^{2/3}+1}{9u^{5/3}}\Big(-\frac{2x}{3}u^{-1/3}e^{-xu^{2/3}}\Big) = \\ &= -2\frac{2xu^{4/3} - 5xu^{4/3} - 5u^{2/3}}{27u^{10/3}}e^{-xu^{2/3}} + 4x\frac{xu^{2/3}+1}{27u^2}e^{-xu^{2/3}} = \\ &= -2\frac{-3xu^{2/3}-5}{27u^{8/3}}e^{-xu^{2/3}} + 4x\frac{xu^{2/3}+1}{27u^2}e^{-xu^{2/3}} = \\ &= 2\frac{3xu^{2/3}+5+2x^2u^{4/3}+2xu^{2/3}}{27u^{8/3}}e^{-xu^{2/3}} = \\ &= 2\frac{5+5xu^{2/3}+2x^2u^{4/3}}{27u^{8/3}}e^{-xu^{2/3}}\,.\end{aligned}$$

Finalmente possiamo maggiorare l'integranda per $x \in]0, x_0]$ con una funzione di $L^1([\pi, +\infty[)$:

$$\begin{aligned}\sup_{0<x\le x_0}\Big|(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,x)\Big| &= \sup_{0<x\le x_0}\Big|\underbrace{(\cos u)}_{\in[-1,1]}2\frac{5+5xu^{2/3}+2x^2u^{4/3}}{27u^{8/3}}\underbrace{e^{-xu^{2/3}}}_{\in]0,1]}\Big| \le \\ &\le 2\frac{5+5x_0u^{2/3}+2x_0^2u^{4/3}}{27u^{8/3}} \in L^1([\pi,+\infty[)\end{aligned}$$

(se l'integrale fosse su $[0,+\infty[$ invece che su $[\pi,+\infty[$ non potremmo fare niente). Torniamo all'integrale di partenza:

$$f(x)=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} g(t,x)\,dt+\int_{\sqrt[3]{\pi}}^{+\infty} g(t,x)\,dt=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} g(t,x)\,dt+\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,x)-\int_\pi^{+\infty}(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,x)\,du\,.$$

Come già osservato possiamo passare al limite per $x\to 0^+$ negli integrali dell'ultimo membro:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)&=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}}\Big(\lim_{x\to 0^+} g(t,x)\Big)\,dt+\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)-\int_\pi^{+\infty}\Big(\lim_{x\to 0^+}(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,x)\Big)\,du=\\&=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} g(t,0)\,dt+\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)-\int_\pi^{+\infty}(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,0)\,du\,.\end{aligned}$$

Non sostituiamo i valori delle derivate di h perché è più comodo rifare l'integrazione per parti a ritroso con l'espressione implicita. Prima però va trasformato l'integrale improprio in limite, perché integrando per parti su tutto $[\pi,+\infty[$ vengono funzioni non in L^1:

$$\begin{aligned}\int_\pi^M(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,0)\,du&=\int_\pi^M(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,0)\,du=\\&=\Big[(\cos u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,0)\Big]_{u=\pi}^M-\int_\pi^M(-\operatorname{sen} u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,0)\,du=\\&=\Big[(\cos M)\frac{-2}{9M^{5/3}}-(\cos\pi)\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)\Big]+\int_\pi^M(\operatorname{sen} u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,0)\,du=\\&=(\cos M)\frac{-2}{9M^{5/3}}+\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)+\int_\pi^M(\operatorname{sen} u)\frac{\partial h}{\partial u}(u,0)\,du=\\&=(\cos M)\frac{-2}{9M^{5/3}}-\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)+\big[(\operatorname{sen} u)h(u,0)\big]_{u=\pi}^M-\int_\pi^M(\cos u)h(u,0)\,du=\\&=(\cos M)\frac{-2}{9M^{5/3}}-\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)+\Big[(\operatorname{sen} M)\frac{1}{3M^{2/3}}-(\operatorname{sen}\pi)h(\pi,0)\Big]-\int_\pi^M(\cos u)h(u,0)\,du=\\&=(\cos M)\frac{-2}{9M^{5/3}}-\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)+(\operatorname{sen} M)\frac{1}{3M^{2/3}}-\int_\pi^M(\cos u)h(u,0)\,du=\\&=(\cos M)\frac{-2}{9M^{5/3}}-\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)+(\operatorname{sen} M)\frac{1}{3M^{2/3}}-\int_\pi^M(\cos u)\frac{1}{3u^{2/3}}\,du\,.\end{aligned}$$

Poiché tutti i termini escluso al più l'ultimo hanno limite finito per $M\to+\infty$, anche quest'ultimo ha limite, e possiamo scrivere

$$\int_\pi^{+\infty}(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,0)\,du=-\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)-\lim_{M\to+\infty}\int_\pi^M(\cos u)\frac{1}{3u^{2/3}}\,du\,.$$

Ritorniamo alla variabile originale $t^3=u$ nell'ultimo integrale:

$$\int_\pi^M(\cos u)\frac{1}{3u^{2/3}}\,du=\int_{\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{M}}(\cos t^3)\frac{1}{3t^2}3t^2\,dt=\int_{\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{M}}\cos(t^3)\,dt=\int_{\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{M}} g(t,0)\,dt\,.$$

L'ultimo integrale ha limite finito per $M\to+\infty$ perché coincide col primo membro, che ha limite finito, come già visto. Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)&=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} g(t,0)\,dt+\frac{\partial h}{\partial u}(\pi,0)-\int_\pi^{+\infty}(\cos u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,0)\,du=\\&=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} g(t,0)\,dt+\lim_{M\to+\infty}\int_{\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{M}} g(t,0)\,dt=\lim_{M\to+\infty}\int_0^{\sqrt[3]{M}} g(t,0)\,dt=\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\cos(t^3)\,dt\,.\end{aligned}$$

Il limite volendo si può calcolare esplicitamente in termini della funzione Gamma e vale

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\cos(t^3)\,dt=\frac{\pi}{3\Gamma(2/3)}\approx 0{,}773343\,.$$