Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 23 giugno 1999

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Sia $f\colon [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata continua, e $0 < a < b < +\infty$ delle costanti. Poniamo

$$g(x) := \frac{f(bx) - f(ax)}{x} \qquad \text{per } x > 0\,.$$

a. La funzione g è necessariamente in L^1 degli intervalli $[0, R]$ o $[0, +\infty]$? E se si aggiunge l'ipotesi che f sia limitata?

b. Dimostrare che $\int_0^R g(x)\,dx = -f(0)\ln(b/a) + \int_a^b f(tR)/t\,dt$ per ogni $R > 0$. (Interpretare $f(bx) - f(ax) = [f(tx)]_{t=a}^{b}$ come l'integrale di una derivata, poi scambiare l'ordine di integrazione, se si può).

c. Dimostrare che se f è periodica di periodo $\tau > 0$ allora esiste finito il limite di $\int_0^R g(x)\,dx$ per $R \to +\infty$ e calcolarlo. In questo caso g è necessariamente in L^1 di $]0, +\infty[$? (Punto **b** e lemma di Riemann-Lebesgue).

d. Dimostrare che se $f(x)$ ha limite finito per $x \to +\infty$ allora esiste finito il limite di $\int_0^R g(x)\,dx$ per $R \to +\infty$ e calcolarlo. In questo caso g è necessariamente in L^1 di $]0, +\infty[$? E se f è monotòna? (Punto **b** e convergenza dominata).

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, $E \in \mathcal{M}$ sia tale che $0 < \mu(E) < +\infty$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ sia $\mathcal{M}$-misurabile, e sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto.

a. Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to I$ una funzione convessa e supponiamo che $f \in L^1(\mu)$ abbia valori in I. Dimostrare che allora

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi \circ f\,d\mu \geq \varphi\Big(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu\Big)\,.$$

b. Se $f > 0$ μ-quasi ovunque, dire quali dei seguenti integrali hanno necessariamente senso, finiti o infiniti (se no esibire un contresempio): $\int_E f\,d\mu$, $\int_E \ln f\,d\mu$, $\int_E f \cdot \ln f\,d\mu$. E se si aggiunge l'ipotesi che $f \in L^1(\mu)$?

c. Dimostrare che se $f \in L^1(\mu)$, $f > 0$, allora

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \ln f\,d\mu \leq \ln\Big(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu\Big)\,,$$

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \cdot \ln f\,d\mu \geq \frac{1}{\mu(E)^2}\Big(\int_E f\,d\mu\Big) \int_E \ln f\,d\mu\,.$$

Punti: 10+5+10+10, 5+10+10

Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 1998/99

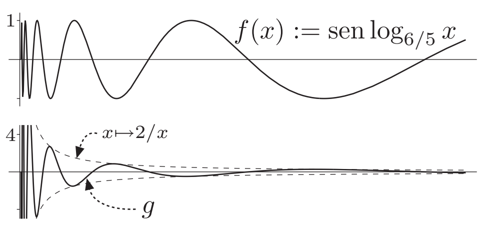
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 23 giugno 1999

Svolgimento

1. a. La funzione
$$g(x) := \frac{f(bx) - f(ax)}{x} \qquad \text{per } x > 0\,.$$
è certamente continua per $x > 0$ perché il numeratore è continuo e il denominatore è pure continuo e si annulla solo per $x = 0$. Gli unici ostacoli all'integrabilità possono essere il comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Cominciamo con $x \to 0^+$: aggiungendo e togliendo $f(0)$ al numeratore, riordinando e usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(bx) - f(ax)}{x} = \frac{f(bx) - f(0)}{x} - \frac{f(ax) - f(0)}{x} = \\ &= b\frac{f(bx) - f(0)}{bx} - a\frac{f(ax) - f(0)}{ax} \longrightarrow bf'(0) - af'(0) = (b-a)f'(0) \quad \text{per } x \to 0^+\,. \end{aligned}$$
(Il limite si calcola ancora più velocemente con la regola de L'Hôpital). Quindi$g$ è in L^1 di ogni intervallo del tipo $[0, R]$. Senza ulteriori ipotesi su f è chiaro che l'andamento per $x \to +\infty$ di $g(x)$ può benissimo non essere integrabile. Per esempio prendiamo $f(x) := x$ e $a = 1$, $b = 2$. Allora $g(x) = (2x - x)/x \equiv 1$, che ovviamente non è in $L^1(]0, +\infty[)$. In realtà neanche l'ipotesi che f sia limitata garantisce che g sia in L^1 di $]0, +\infty[$, ma i contresempi sono più sottili. Infatti se f è monotona allora g non cambia segno, e
$$\int_0^{+\infty} |g(x)|\, dx = \pm \int_0^{+\infty} g(x)\, dx = \pm \lim_{R \to +\infty} \int_0^R g(x)\, dx$$
e quest'ultimo limite esiste finito per il punto **d**. Similmente non si può chiedere che f sia definitivamente monotona. Quindi ogni candidata f limitata che dia una $g \notin L^1(]0, +\infty[)$ deve essere oscillante. Un contresempio con f periodica lo vedremo nel punto **c**, ma qui possiamo darne uno in cui i conti sono più facili: $f(x) := \operatorname{sen} \ln x$, $a = 1$, $b = e^\pi$. Con questa scelta gli integrali si calcolano esplicitamente usando una formula trigonometrica e col cambio di variabile $\ln x = t$:
$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} |g(x)|\, dx &= \int_2^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}\ln(e^\pi x) - \operatorname{sen}\ln x}{x} \right| dx = \int_2^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi + \ln x) - \operatorname{sen}\ln x}{x} \right| dx = \\ &= \int_2^{+\infty} \left| \frac{-\operatorname{sen}\ln x - \operatorname{sen}\ln x}{x} \right| dx = \int_2^{+\infty} \frac{|2\operatorname{sen}\ln x|}{x}\, dx = \\ &= \int_{\ln 2}^{+\infty} |2 \operatorname{sen} t|\, dt = +\infty\,. \end{aligned}$$



Fermi tutti: questa f non è definita in $x = 0$. La cosa è grave?
La figura qui accanto è fatta con $f(x) := \operatorname{sen}\log_{6/5} x$, $a = 1$, $b = (6/5)^\pi$. Abbiamo cambiato la base dei logaritmi da e in $6/5$ per far stare nella figura più di una oscillazione. Il grafico di f assomiglia a quello famoso di $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$ per x vicino a 0, ma ha infinite oscillazioni anche per $x \to +\infty$, che si ottengono una dall'altra con un cambio di scala orizzontale.
Il limite dell'integrale di g su $]0, R[$ per $R \to +\infty$ (quando esiste) è detto *integrale di Frullani*.

b. Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$f(bx) - f(ax) = [f(tx)]_{t=a}^{b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(tx)\, dt = \int_a^b x f'(tx)\, dt = x \int_a^b f'(tx)\, dt\,.$$

Quindi

$$\int_0^R g(x)\, dx = \int_0^R dx \int_a^b f'(tx)\, dt\,.$$

La funzione $(t, x) \mapsto f'(tx)$ è continua sul compatto $[a, b] \times [0, R]$. Quindi si può invertire l'ordine di integrazione:

$$\int_0^R g(x)\, dx = \int_a^b dt \int_0^R f'(tx)\, dx = \int_a^b \Big[\frac{f(tx)}{t}\Big]_{x=0}^{R} dt = \int_a^b \frac{f(tR) - f(0)}{t}\, dt =$$
$$= \int_a^b \frac{f(tR)}{t}\, dt - f(0) \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \int_a^b \frac{f(tR)}{t}\, dt - f(0) \ln \frac{b}{a}\,.$$

c. Per il punto precedente basta calcolare il limite di $\int_a^b f(tR)/t\, dt$ per $R \to +\infty$. Scriviamo così:

$$\int_a^b \frac{f(tR)}{t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{[a,b]}(t)}{t} \cdot f(tR)\, dt\,.$$

La funzione $t \mapsto \chi_{[a,b]}(t)/t$ è in $L^1(\mathbb{R})$ perché $0 < a < b < +\infty$. La funzione f è periodica di periodo $\tau > 0$ per ipotesi, ed è limitata in quanto continua e periodica. Dunque per il lemma di Riemann-Lebesgue

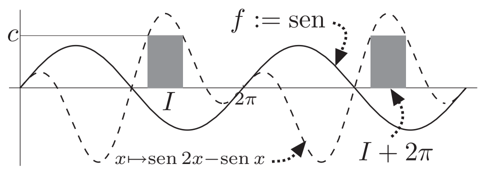
$$\lim_{R\to+\infty} \int_a^b \frac{f(tR)}{t}\, dt = \lim_{R\to+\infty} \int_R \frac{\chi_{[a,b]}(t)}{t} \cdot f(tR)\, dt = \Big(\int_R \frac{\chi_{[a,b]}(t)}{t}\, dt\Big) \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt =$$
$$= \Big(\int_a^b \frac{1}{t}\, dt\Big) \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt = \frac{\ln(b/a)}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt\,.$$

Quindi

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R g(x)\, dx = \lim_{R\to+\infty} \Big(-f(0) \ln \frac{b}{a} + \int_a^b \frac{f(tR)}{t}\, dt\Big) = -f(0) \ln \frac{b}{a} + \frac{\ln(b/a)}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt =$$
$$= \Big(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt - f(0)\Big) \ln \frac{b}{a}\,.$$

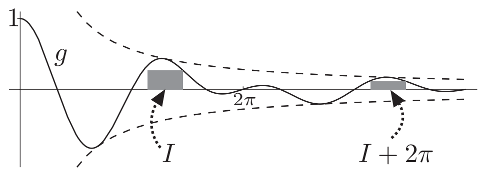
Per vedere se per caso g è necessariamente in L^1 di $]0, +\infty[$, la prima scelta che viene in mente è già un contresempio: $f = \operatorname{sen}$, $a = 1$, $b = 2$:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x}{x}\,.$$



Il numeratore è una funzione periodica di periodo 2π e non identicamente nulla. Sia I un intervallo compatto non degenere su cui $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x$ non si annulla, per esempio è > 0, per cui

$$c := \inf_{x\in I} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x) > 0\,.$$



Possiamo supporre che I abbia lunghezza minore di 2π. Sull'intervallo traslato $I + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$ l'integrale di g si stima col cambio di variabile $t = x - 2k\pi$:

$$\int_{I+2k\pi} g(x)\, dx = \int_{I+2k\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_I \frac{\operatorname{sen} 2(t + 2k\pi) - \operatorname{sen}(t + 2k\pi)}{t + 2k\pi}\, dt =$$
$$= \int_I \frac{\operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t}{t + 2k\pi}\, dt \geq \lambda(I) \frac{c}{2k\pi + \sup I}\,.$$

($\lambda(I)$ è la misura di Lebesgue di I, ossia la sua lunghezza, che è > 0). Allora poiché gli intervalli $I + 2k\pi$ sono a due a due disgiunti al variare di $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1(]0,+\infty[)} &= \int_0^{+\infty} \bigl|g(x)\bigr|\,dx \geq \int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(I+2k\pi)} \bigl|g(x)\bigr|\,dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{I+2k\pi} \bigl|g(x)\bigr|\,dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{I+2k\pi} g(x)\,dx \geq \\ &\geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(I) \frac{c}{2k\pi + \sup I} = \lambda(I) c \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2k\pi + \sup I} = +\infty\,.\end{aligned}$$

Generalizzazione. Sia f periodica di periodo $\tau > 0$, non costante, e supponiamo che b/a sia razionale:

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}\,, \qquad \text{con } p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,.$$

Allora la funzione $x \mapsto f(bx) - f(ax)$ è periodica di periodo $T = p\tau/b = q\tau/a$, non è identicamente nulla, e la g non è in L^1 di $]0, +\infty[$.

d. Sia ℓ il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Come nel punto precedente ci aiutiamo colla formula del punto **b**:

$$\int_0^R g(x)\,dx = \int_a^b \frac{f(tR)}{t}\,dt - f(0) \ln \frac{b}{a}\,.$$

Abbiamo

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{f(tR)}{t} = \frac{\ell}{t} \qquad \text{per ogni } t > 0\,.$$

Inoltre f è limitata, essendo continua sull'intervallo $[0, +\infty[$ ed avendo limite finito a $+\infty$. Quindi

$$\sup_{R>0} \left|\frac{f(tR)}{t}\right| \leq \frac{\sup|f|}{t} \in L^1([a, b])\,.$$

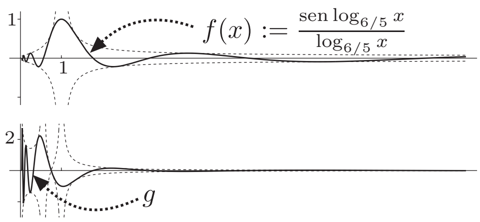
Quindi possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty} \int_0^R g(x)\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_a^b \frac{f(tR)}{t}\,dt - f(0) \ln \frac{b}{a} = \int_a^b \Bigl(\lim_{R\to+\infty} \frac{f(tR)}{t}\Bigr) dt - f(0) \ln \frac{b}{a} = \\ &= \int_a^b \frac{\ell}{t}\,dt - f(0) \ln \frac{b}{a} = \ell \ln \frac{b}{a} - f(0) \ln \frac{b}{a} = \bigl(\ell - f(0)\bigr) \ln \frac{b}{a}\,.\end{aligned}$$

Per vedere se g possa non essere in L^1 di $]0, +\infty[$ proviamo con una variante dell'esempio del punto **a**:

$$f(x) := h(x) \operatorname{sen} \ln x\,, \quad a = 1,\ b = e^\pi,$$

dove $h(x)$ è da determinare fra le funzioni positive e infinitesime per $x \to +\infty$. Allora



$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{h(e^\pi x) \operatorname{sen} \ln(e^\pi x) - h(x) \operatorname{sen} \ln x}{x} = \\ &= -\frac{h(e^\pi x) + h(x)}{x} \operatorname{sen} \ln x\,.\end{aligned}$$

(È cruciale che le due h si sommano, non sottraggono!). Ora i conti vanno a posto se prendiamo per h un infinitesimo abbastanza lento, per esempio

$$h(x) := \frac{1}{\ln x}\,.$$

Infatti, ancora col cambio di variabile $\ln x = t$,

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1([2,+\infty[)} &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x} \Bigl(\frac{1}{\ln(e^\pi x)} + \frac{1}{\ln x}\Bigr) \bigl|\operatorname{sen} \ln x\bigr|\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x} \Bigl(\frac{1}{\pi + \ln x} + \frac{1}{\ln x}\Bigr) \bigl|\operatorname{sen} \ln x\bigr|\,dx = \\ &= \int_{\ln 2}^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{\pi + t} + \frac{1}{t}\Bigr) \bigl|\operatorname{sen} t\bigr|\,dt\,.\end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale si dimostra divergente con la stessa tecnica del punto precedente. Cosa succede a $f(x)$ per $x \to 1$, per $x \to 0^+$ e per $x \to e^{-\pi}$?

2. a. Questa è una variante della disuguaglianza di Jensen: si riduce a quella già nota quando $\mu(E) = 1$ ed $E = X$. Si può dimostrarla ricalcando con qualche aggiustamento la dimostrazione vecchia. Cominciamo col vedere che la media integrale di f su E

$$M_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu$$

appartiene a I. Sia $a = \inf I$, $b = \sup I$. Vogliamo dimostrare che $a < M_E(f) < b$. Poiché f ha valori in I e $0 < \mu(E) < +\infty$,

$$a < f < b\,, \quad \text{da cui, integrando su } E, \quad a\mu(E) < \int_E f\, d\mu < b\mu(E)\,, \quad \text{cioè} \quad a < M_E(f) < b\,.$$

La funzione φ è convessa su I, e quindi ha derivata sinistra e destra finite in ogni punto t_0 e vale la disuguaglianza

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_0) + \varphi'_-(t_0)(t - t_0) \quad \forall t \in I\,.$$

Scrivendo $t = f(x) \in I$ e $t_0 = M_E(f)$ si ha

$$\varphi\big(f(x)\big) \geq \varphi(t_0) + \varphi'_-(t_0)(f(x) - t_0) \quad \forall t \in I\,.$$

Moltiplichiamo per χ_E:

$$\varphi\big(f(x)\big)\chi_E(x) \geq \Big(\varphi(t_0) + \varphi'_-(t_0)(f(x) - t_0)\Big)\chi_E(x) \quad \forall t \in I\,.$$

Poiché il secondo membro è una funzione di $L^1(\mu)$, il primo membro è semi-integrabile inferiormente e ha senso prendere gli integrali su X di ambo i membri:

$$\begin{aligned}\int_E \varphi \circ f\, d\mu &\geq \varphi(t_0)\mu(E) + \varphi'_-(t_0)\bigg(\int_E f\, d\mu - t_0\mu(E)\bigg) = \mu(E)\varphi\big(M_E(f)\big) + \varphi'_-(t_0)\big(t_0\mu(E) - t_0\mu(E)\big) = \\ &= \mu(E)\varphi\big(M_E(f)\big)\,.\end{aligned}$$

Dividendo per $\mu(E)$ si ottiene la tesi, che si può riscrivere anche come

$$M_E(\varphi \circ f) \geq \varphi\big(M_E(f)\big)\,.$$

Secondo modo. Definiamo una nuova misura $\nu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty[$ normalizzata e concentrata su E come

$$\nu(F) := \frac{\mu(F \cap E)}{\mu(E)} = \int_F \frac{\chi_E}{\mu(E)}\, d\mu \quad \text{per } F \in \mathcal{M}\,.$$

Che ν sia proprio una misura viene dal seguente fatto noto: se $h\colon X \to [0, +\infty]$ è misurabile allora la funzione $\nu(F) := \int_F h\, d\mu$ è una misura, e l'uguaglianza

$$\int_X g\, d\nu = \int_X gh\, d\mu$$

vale per ogni $g\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile positiva. Nel nostro caso $h = \chi_E/\mu(E)$ è limitata, per cui si vede facilmente che l'uguaglianza

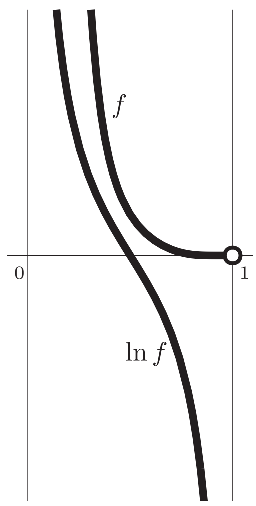
$$\int_X g\, d\nu = \int_X gh\, d\mu = \int_X g \frac{\chi_E}{\mu(E)}\, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E g\, d\mu = M_E(g)$$

vale anche per ogni $g\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e semi-integrabile rispetto a μ. Applichiamo la disuguaglianza di Jensen a f sullo spazio $(X, \mathcal{M}, \nu)$:

$$\int_X \varphi \circ f\, d\nu \geq \varphi\Big(\int_X f\, d\nu\Big)\,, \qquad \text{cioè} \qquad M_E(\varphi \circ f) \geq \varphi\big(M_E(f)\big)\,.$$

b. Se $f > 0$ μ-quasi ovunque, allora l'integrale $\int_E f\,d\mu$ ha certamente senso, e può essere $+\infty$ se $f \notin L^1(\mu)$. L'integrale $\int_E \ln f\,d\mu$ invece può non avere senso: prendiamo $X = E =]0,1[$ con la misura di Lebesgue e

$$f(x) = \exp\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\Big) \qquad \text{per } x \in]0,1[\,.$$



Allora

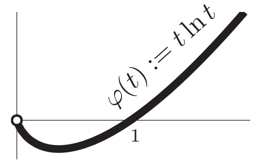
$$\ln f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\,,$$

del quale sia la parte positiva che la parte negativa hanno integrale infinito su $]0,1[$. Se però $f \in L^1(X)$ allora entra in gioco la disuguaglianza

$$\ln t \le t - 1\,, \quad \text{da cui} \quad \ln f \le f - 1\,, \quad \text{e quindi} \quad \chi_E \ln f \le (f-1)\chi_E\,.$$

Essendo $(f-1)\chi_E \in L^1(\mu)$ la funzione $\chi_E \ln f$ risulta semi-integrabile superiormente, e il suo integrale ha senso.
Infine consideriamo la funzione $\varphi(t) := t\ln t$. Questa è continua su $]0,+\infty[$, tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, e tende a 0 per $t \to 0^+$:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} -t = 0\,.$$



Quindi φ è limitata inferiormente e la funzione $\chi_E f \ln f = \chi_E \varphi\circ f$ è semi-integrabile inferiormente, essendo maggiore o uguale alla funzione $\chi_E \inf\varphi$, che è in $L^1(\mu)$. Questo senza bisogno di supporre che f sia in $L^1(\mu)$.

c. Il logaritmo è una funzione *concava*, non convessa, in quanto

$$\ln' x = \frac{1}{x}\,, \qquad \ln'' x = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad \text{per } x > 0\,.$$

Ma allora la funzione $\varphi(x) := -\ln x$ è convessa su $]0,+\infty[$ e possiamo applicare il punto **a**:

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi\circ f\,d\mu \ge \varphi\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big)\,,$$

cioè

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E -\ln f\,d\mu \ge -\ln\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big)\,.$$

Riordinando si ricava la prima delle due disuguaglianze da dimostrare:

$$\ln\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big) \ge \frac{1}{\mu(E)}\int_E \ln f\,d\mu\,, \quad \text{o anche} \quad \ln\big(M_E(f)\big) \ge M_E(\ln f)\,.$$

Per l'altra osserviamo che la funzione $\varphi(t) := t\ln t$ è convessa:

$$\varphi'(t) = \ln t + \frac{t}{t} = \ln t + 1\,, \qquad \varphi''(t) = \frac{1}{t} > 0 \qquad \forall t > 0\,.$$

Applicando il punto **a** si ricava

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\cdot\ln f\,d\mu = \frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi\circ f\,d\mu \ge \varphi\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big) = \Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big)\ln\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big)\,.$$

L'ultimo fattore si minora con la disuguaglianza di sopra e quindi

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\cdot\ln f\,d\mu \ge \Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big)\ln\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big) \ge \Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\Big)\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E \ln f\,d\mu\Big) \ge$$
$$\ge \frac{1}{\mu(E)^2}\Big(\int_E f\,d\mu\Big)\int_E \ln f\,d\mu\,,$$

o anche

$$M_E(f\ln f) \ge M_E(f)M_E(\ln f)\,.$$

Caso particolare in cui $X = E$ e $\mu(X) = 1$:

$$\int_X f\ln f\,d\mu \ge \Big(\int_X f\,d\mu\Big)\Big(\int_X \ln f\,d\mu\Big)\,.$$