Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 7 giugno 1999

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore. Questo compito vale anche come scritto del primo modulo.

1. Sia $\mathcal{S}$ una σ-algebra sull'insieme X, ed $\mathcal{M}$ la σ-algebra di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Sia $f\colon X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione tale che $x\mapsto f(x,t)$ sia $\mathcal{S}$-misurabile per ogni $t\in\mathbb{Q}$, e che $t\mapsto f(x,t)$ sia continua per ogni $x\in X$. Dimostrare che $(x,t)\mapsto f(x,t)$ è $\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}$-misurabile.
(Considerare per esempio $f_n(x,t):=f(x,2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor)$).

2. Per $\theta\in[0,\pi[$ e $0<\beta<1$ poniamo

$$\varphi(\theta):=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}dx\,,\qquad p(x,\theta):=\left|1+xe^{i\theta}\right|^2,$$

$$\psi_1(\theta)=\int_0^1\frac{x^\beta-1}{p(x,\theta)}dx\,,\qquad \psi_2(\theta)=\int_1^{+\infty}\frac{x^\beta-1}{p(x,\theta)}dx\,,\qquad \psi_3(\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{p(x,\theta)}dx\,.$$

a. Dimostrare che per ogni $x\ge 0$ e $\theta\in[0,\pi[$

$$p(x,\theta)=\begin{cases}1+x^2+2x\cos\theta\ge(x-1)^2\\ |x+e^{-i\theta}|^2=\operatorname{sen}^2\theta+(x+\cos\theta)^2\ge\operatorname{sen}^2\max\{\theta,\pi/2\}\,,\end{cases}$$

e che i quattro integrali hanno senso. Inoltre φ è derivabile e $\varphi'(\theta)=-i\beta\varphi(\theta)$ per ogni $\theta\in[0,\pi[$. Dedurne che $\varphi(\theta)=\varphi(0)e^{-i\beta\theta}$.
(Integrare per parti $\varphi'(\theta)$ con x^β come fattore finito).

b. Dimostrare che $\Im\varphi(\theta)=-(\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta)+\psi_3(\theta))\operatorname{sen}\theta$, ($\Im z$ è la parte immaginaria di $z\in\mathbb{C}$) e inoltre per ogni $\theta\in\,]0,\pi[$

$$0\le\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta)=\int_0^1\frac{(1-x^\beta)^2}{x^\beta p(x,\theta)}dx\le\frac{1}{1-\beta}\,,\qquad \psi_3(\theta)=\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

(In φ_2 cambiare variabili $t=1/x$; per φ_3 c'è una primitiva tipo arcotangente).

c. Dimostrare che $\Im(\varphi(0)e^{-i\beta\theta})=-(\operatorname{sen}\beta\theta)\beta^{-1}\int_0^{+\infty}1/(1+t^{1/\beta})\,dt$ e insieme ai punti precedenti dedurre che

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{1/\beta}}dt=\frac{\beta\pi}{\operatorname{sen}\beta\pi}\qquad\forall\beta\in\,]0,1[\,.$$

(Cambiamento di variabile $t=x^\beta$; far tendere $\theta\to\pi^-$).

Punti: 15, 15+15+10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 7 giugno 1999

Svolgimento

1. Consideriamo la successione di funzioni $f_n\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x,t) := f\bigl(x, 2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor\bigr)\,.$$

Dimostriamo che f_n è $\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}$-misurabile. Sia V un aperto di $\mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
f_n^{-1}(V) &= \Bigl\{(x,t)\in X\times\mathbb{R} \Bigm| f\bigl(x,2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor\bigr)\in V\Bigr\} = \\
&= \Bigl\{(x,t)\in X\times\mathbb{R} \Bigm| \exists k\in\mathbb{Z} \text{ tale che } \lfloor 2^n t\rfloor = k \text{ e } f\bigl(x,2^{-n}k\bigr)\in V\Bigr\} = \\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Bigl\{(x,t)\in X\times\mathbb{R} \Bigm| k\le 2^n t < k+1 \text{ e } f\bigl(x,2^{-n}k\bigr)\in V\Bigr\} = \\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Bigl\{(x,t)\in X\times\mathbb{R} \Bigm| \underbrace{t\in \bigl[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\bigr[}_{\text{non dipende da } x} \text{ e } \underbrace{f\bigl(x,2^{-n}k\bigr)\in V}_{\text{non dipende da } t}\Bigr\} = \\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Biggl(\underbrace{\bigl(f(\,\cdot\,,2^{-n}k)\bigr)^{-1}(V)}_{\in\mathcal{S}} \times \underbrace{\bigl[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\bigr[}_{\in\mathcal{M}}\Biggr)\,.
\end{aligned}$$

$[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)[\ \in\mathcal{M}$ perché è un intervallo, e $\bigl(f(\,\cdot\,,2^{-n}k)\bigr)^{-1}(V)\in\mathcal{S}$ perché $2^{-n}k\in\mathbb{Q}$ e quindi $x\mapsto f(x,2^{-n}k)$ è $\mathcal{S}$-misurabile per ipotesi. Dunque $f_n^{-1}(V)\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}$, ed f_n è davvero $\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}$-misurabile.
Ora $\tau-1<\lfloor\tau\rfloor\le\tau$ per ogni $\tau\in\mathbb{R}$. Applicando la disuguaglianza con $\tau=2^n t$ abbiamo $2^n t-1<\lfloor 2^n t\rfloor\le 2^n t$, per cui

$$t-\frac{1}{2^n} < 2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor \le t \qquad \forall t\in\mathbb{R}\,.$$

In particolare

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor = t \qquad \forall t\in\mathbb{R}\,.$$

Sapendo che per ogni $x\in X$ la funzione $t\mapsto f(x,t)$ è continua, deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x,t) = \lim_{n\to+\infty} f\bigl(x,2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor\bigr) = f\Bigl(x, \lim_{n\to+\infty} 2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor\Bigr) = f(x,t) \qquad \forall (x,t)\in X\times\mathbb{R}\,.$$

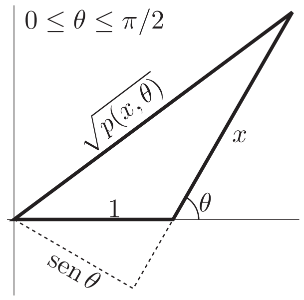
La funzione f risulta pertanto $\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}$-misurabile in quanto limite puntuale di una successione di funzioni $\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}$-misurabili. Notare che la stessa conclusione si aveva con l'ipotesi più debole che $t\mapsto f(x,t)$ fosse continua *a sinistra* in ogni punto $t\in\mathbb{R}$. E se avessimo continuità a destra? E se la $\mathcal{S}$-misurabilità di $x\mapsto f(x,t)$ si supponesse per t appartenente a un generico sottinsieme D denso in $\mathbb{R}$?

2. a. Poiché $x\in\mathbb{R}$, il coniugato di $1+xe^{i\theta}$ è $1+xe^{-i\theta}$. Per $x\ge 0$ e θ qualsiasi abbiamo

$$\begin{aligned}
p(x,\theta) &:= \bigl|1+xe^{i\theta}\bigr|^2 = (1+xe^{i\theta})(1+xe^{-i\theta}) = 1+xe^{-i\theta}+xe^{i\theta}+x^2 = 1+\underbrace{2x\cos\theta}_{\ge -2x}+x^2 \ge \\
&\ge 1-2x+x^2 = (1-x)^2\,.
\end{aligned}$$

Moltiplichiamo ora $p(x,\theta)$ per $1 = |e^{-i\theta}|^2$:

$$p(x,\theta) := \left|1+xe^{i\theta}\right|^2 = \left|e^{-i\theta}\right|^2 \cdot \left|1+xe^{i\theta}\right|^2 = \left|e^{-i\theta}+x\right|^2 = \big(\Re(e^{-i\theta}+x)\big)^2 + \big(\Im(e^{-i\theta}+x)\big)^2 =$$
$$= \big(\cos(-\theta)+x\big)^2 + \big(\operatorname{sen}(-\theta)\big)^2 = \operatorname{sen}^2\theta + (x+\cos\theta)^2 .$$

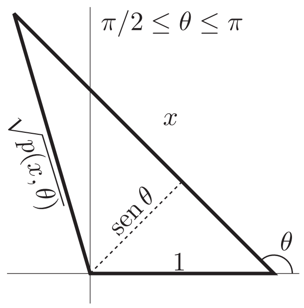


Ora distinguiamo i valori di θ:

$$p(x,\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \overbrace{(\underbrace{x+\cos\theta}_{\ge \cos\theta \ge 0})^2}^{\ge \cos^2\theta} \ge \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

mentre

$$p(x,\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \underbrace{(x+\cos\theta)^2}_{\ge 0} \ge \operatorname{sen}^2\theta \qquad \forall\theta \in [0,\pi[\,.$$



Mettendo insieme le ultime due minorazioni si ottiene

$$p(x,\theta) \ge \operatorname{sen}^2 \max\Big\{\theta, \frac{\pi}{2}\Big\} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le \theta \le \pi/2, \\ \operatorname{sen}^2\theta & \text{se } \pi/1 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Le disuguaglianze si possono interpretare geometricamente guardando al triangolo di vertici 0, 1 e $1+xe^{i\theta}$: il lato da 0 a $1+xe^{i\theta}$ ha lunghezza $\sqrt{p(x,\theta)}$; questa lunghezza è maggiore o uguale a $\operatorname{sen}\theta$, che è la distanza di 0 dalla retta che passa per 1 e $1+xe^{i\theta}$; è maggiore o uguale a 1 quando $0 \le \theta \le \pi/2$; ma è anche sempre maggiore o uguale alla differenza degli altri due lati, cioè di $|x-1|$.

Nelle funzioni integrande dei quattro integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}dx\,, \qquad \int_0^1 \frac{x^\beta - 1}{p(x,\theta)}dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^\beta-1}{p(x,\theta)}dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(x,\theta)}dx$$

i denominatori sono continui, e poi non si annullano mai, essendo

$$\left|1+xe^{i\theta}\right| = \sqrt{p(x,\theta)} \ge \operatorname{sen}\max\Big\{\theta,\frac{\pi}{2}\Big\} > 0\,, \qquad p(x,\theta) \ge \operatorname{sen}^2\max\Big\{\theta,\frac{\pi}{2}\Big\} > 0\,.$$

Per $x \to 0^+$ il primo integrando diverge con andamento $x^{\beta-1}$, che è integrabile, mentre gli altri integrandi hanno limite finito. Per $x \to +\infty$ i moduli si maggiorano tutti in modo integrabile:

$$\left|\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\right| \le \frac{x^{\beta-1}}{|x-1|} \sim \frac{1}{x^{2-\beta}}\,, \qquad \left|\frac{x^\beta-1}{p(x,\theta)}\right| \le \frac{\left|x^\beta-1\right|}{(x-1)^2} \sim \frac{1}{x^{2-\beta}}\,, \qquad \frac{1}{p(x,\theta)} \le \frac{1}{(x-1)^2} \sim \frac{1}{x^{2-\beta}}\,.$$

Quindi tutti gli integrali esistono (finiti). La dipendenza da θ ci viene chiesta solo per il primo integrale:

$$\varphi(\theta) := \int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}dx\,.$$

La maggiorazione brutale su tutti i $\theta \in [0,\pi[$ non porta a niente, a causa della singolarità non integrabile quando $x \to 1$:

$$\sup_{0\le\theta<\pi}\left|\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\right| \ge \lim_{\theta\to\pi^-}\left|\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\right| = \left|\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\pi}}\right| = \frac{x^{\beta-1}}{|1-x|} \notin L^1\big(]0,+\infty[\big)\,.$$

Fissiamo $\theta_0 \in]\pi/2, \pi[$ e maggioriamo solo per i $\theta \in [0, \theta_0[$:

$$\sup_{0\le\theta<\theta_0} \left| \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}} \right| = \sup_{0\le\theta<\theta_0} \left| \frac{x^{\beta-1}}{\sqrt{p(x,\theta)}} \right| \le \sup_{0\le\theta<\theta_0} \frac{x^{\beta-1}}{\max\bigl\{|x-1|\,, \operatorname{sen}\max\{\theta,\pi/2\}\bigr\}} =$$
$$= \frac{x^{\beta-1}}{\max\bigl\{|x-1|\,, \operatorname{sen}\theta_0\bigr\}} \in L^1\bigl(]0,+\infty[\bigr)\,.$$

Poiché la funzione integranda è chiaramente continua rispetto a θ, possiamo concludere che φ è continua su $[0, \theta_0[$ per ogni $\theta_0 \in [\pi/2, \pi[$, cioè è continua su tutto $[0, \pi[$. I calcoli per la derivabilità sono simili:

$$\sup_{0\le\theta<\theta_0} \left| \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}} \right| = \sup_{0\le\theta<\theta_0} \left| \frac{x^{\beta-1}}{(1+xe^{i\theta})^2} \cdot xie^{i\theta} \right| = \sup_{0\le\theta<\theta_0} \left| \frac{x^{\beta}}{p(x,\theta)} \right| \le$$
$$\le \sup_{0\le\theta<\theta_0} \frac{x^{\beta}}{\max\bigl\{(x-1)^2, \operatorname{sen}^2\max\{\theta,\pi/2\}\bigr\}} =$$
$$= \frac{x^{\beta}}{\max\bigl\{(x-1)^2, \operatorname{sen}^2\theta_0\bigr\}} \in L^1\bigl(]0,+\infty[\bigr)\,,$$

ed è stabilito che φ è di classe C^1 su $[0, \pi[$. Facciamo un'integrazione per parti di $\varphi'(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(\theta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{(1+xe^{i\theta})^2} \cdot xie^{i\theta}\, dx = \\
&= i\int_0^{+\infty} \frac{x^\beta e^{i\theta}}{(1+xe^{i\theta})^2}\, dx = i\int_0^{+\infty} x^\beta \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(\frac{1}{1+xe^{i\theta}}\Bigr)\, dx = \\
&= i\Bigl[x^\beta \cdot \frac{1}{1+xe^{i\theta}}\Bigr]_{x=0}^{+\infty} - i\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+xe^{i\theta}} \beta x^{\beta-1}\, dx = 0 - i\beta\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\, dx = \\
&= -\, i\beta\varphi(\theta)\,.
\end{aligned}$$

Dunque φ è soluzione dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\varphi'(\theta) = -i\beta\varphi(\theta)\,,$$

che come noto ha per unica soluzione (assegnato $\varphi(0)$)

$$\varphi(\theta) = \varphi(0)e^{-i\beta\theta} \qquad \forall\theta \in [0, \pi[$$

(le funzioni qui sono a valori complessi, ma i risultati sono gli stessi che nel caso reale).

b. Manipoliamo la somma degli altri tre integrali :

$$\begin{aligned}
\psi_1(\theta) + \psi_2(\theta) + \psi_3(\theta) &= \int_0^1 \frac{x^\beta - 1}{p(x,\theta)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\beta - 1}{p(x,\theta)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(x,\theta)} dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^\beta - 1}{p(x,\theta)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(x,\theta)} dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^\beta - 1 + 1}{p(x,\theta)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^\beta}{p(x,\theta)} dx\,.
\end{aligned}$$

Ora consideriamo $\Im\varphi(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\Im\varphi(\theta) &= \int_0^{+\infty} \Im\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\, dx = \int_0^{+\infty} \Im\frac{x^{\beta-1}(1+xe^{-i\theta})}{(1+xe^{i\theta})(1+xe^{-i\theta})} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}(-x\operatorname{sen}\theta)}{p(x,\theta)} dx = \\
&= -\,(\operatorname{sen}\theta)\int_0^{+\infty} \frac{x^\beta}{p(x,\theta)} dx = -(\operatorname{sen}\theta)\bigl(\psi_1(\theta) + \psi_2(\theta) + \psi_3(\theta)\bigr)\,.
\end{aligned}$$

In $\psi_2(\theta)$ facciamo il cambio di variabile $t = 1/x$, per il quale $dx = -(1/t^2)dt$, ed usando di nuovo il coniugio e la moltiplicazione per $1 = |e^{i\theta}|^2$ al denominatore,

$$\psi_1(\theta) = \int_1^{+\infty} \frac{x^\beta - 1}{p(x,\theta)} dx = \int_1^0 \frac{t^{-\beta} - 1}{|1 + (e^{i\theta}/t)|^2} \frac{-dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^{-\beta} - 1}{|t + e^{i\theta}|^2} dt = \int_0^1 \frac{t^{-\beta} - 1}{|t + e^{-i\theta}|^2} dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{t^{-\beta} - 1}{|1 + te^{i\theta}|^2} dt = \int_0^1 \frac{x^{-\beta} - 1}{p(x,\theta)} dx\,.$$

Ora sommiamo ψ_1 e ψ_2:

$$\psi_1(\theta) + \psi_2(\theta) = \int_0^1 \frac{x^\beta - 1}{p(x,\theta)} dx + \int_0^1 \frac{x^{-\beta} - 1}{p(x,\theta)} dx = \int_0^1 \frac{x^\beta + x^{-\beta} - 1}{p(x,\theta)} dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{-\beta}(x^{2\beta} + 1 - 2x^\beta)}{p(x,\theta)} dx = \int_0^1 \frac{(1 - x^\beta)^2}{x^\beta p(x,\theta)} dx\,.$$

Poiché $0 \le x \le 1$ e $0 < \beta < 1$ si ha che $x \le x^\beta \le 1$, per cui $0 \le 1 - x^\beta \le 1 - x$ e poi $(1 - x^\beta)^2 \le (1 - x)^2$. Usando il fatto che già sappiamo che $p(x,\theta) \ge (x-1)^2 = (1-x)^2$ abbiamo la maggiorazione

$$\psi_1(\theta) + \psi_2(\theta) = \int_0^1 \frac{(1 - x^\beta)^2}{x^\beta p(x,\theta)} dx \le \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{x^\beta (1-x)^2} dx = \int_0^1 x^{-\beta} dx = \Big[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\Big]_{x=0}^1 = \frac{1}{1-\beta}\,.$$

Che $\psi_1(\theta) + \psi_2(\theta)$ sia ≥ 0 è chiaro, essendo l'integrando ≥ 0.
Quanto all'ultimo integrale, scrivendo l'integranda nel modo seguente, quando $\operatorname{sen}\theta \ne 0$,

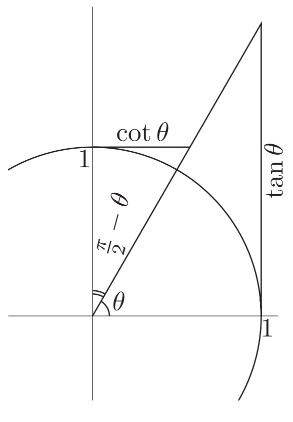
$$\frac{1}{p(x,\theta)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta + (x + \cos\theta)^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta})^2}$$

si trova ad occhio la primitiva per $\theta \in]0,\pi[$:

$$x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \arctan \frac{x + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Dunque

$$\psi_3(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(x,\theta)} dx = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Big[\arctan \frac{x + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Big]_{x=0}^{+\infty} =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Big)\,.$$



Usando l'identità trigonometrica

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan\Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big)$$

e ricordando che

$$\arctan(\tan\alpha) = \alpha \quad \text{se } |\alpha| < \frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{e} \qquad \theta \in]0,\pi[\quad \Rightarrow \quad \Big|\frac{\pi}{2} - \theta\Big| < \frac{\pi}{2}$$

si ricava

$$\psi_3(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big)\Big) = \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \forall\theta \in]0,\pi[\,.$$

c. Possiamo scrivere, col cambio di variabili $t = x^\beta$, cioè $x = t^{1/\beta}$, $dx = \beta^{-1} t^{1/\beta - 1}\, dt$,

$$\varphi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1 + xe^{i0}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x} dx \int_0^{+\infty} \frac{t^{1-1/\beta}}{1 + t^{1/\beta}} \beta^{-1} t^{1/\beta - 1}\, dt = \beta^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^{1/\beta}} dt \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi

$$\Im\big(\varphi(0)e^{-i\beta\theta}\big) = \varphi(0)\Im e^{-i\beta\theta} = \varphi(0)(-\operatorname{sen}\beta\theta) = -\frac{\operatorname{sen}\beta\theta}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{1/\beta}}dt\,.$$

Combinando coi risultati dei punti precedenti

$$\begin{aligned}-\frac{\operatorname{sen}\beta\theta}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{1/\beta}}dt &= \Im\big(\varphi(0)e^{-i\beta\theta}\big) = \Im\varphi(\theta) = -(\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta)+\psi_3(\theta))\operatorname{sen}\theta = \\ &= -\Big(\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta)+\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Big)\operatorname{sen}\theta = -\big(\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta)\big)\operatorname{sen}\theta - \theta\,.\end{aligned}$$

Ricordando che $\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta)$ è limitato, possiamo passare al limite per $\theta \to \pi^-$ nel primo e nell'ultimo membro e ricavare

$$-\frac{\operatorname{sen}\beta\pi}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{1/\beta}}dt = 0-\pi\,,$$

cioè

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{1/\beta}}dt = \frac{\beta\pi}{\operatorname{sen}\beta\pi} \qquad \forall\beta\in\,]0,1[.}$$

In particolare, prendendo $\beta = 1/n$ con n intero ≥ 2,

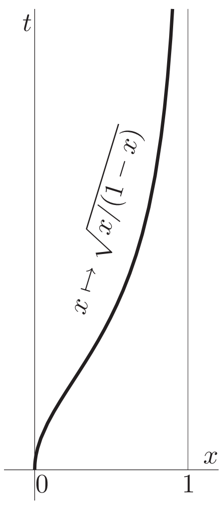
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^n}dt = \frac{\pi}{n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}\,.$$

Per esempio, consultando una tavola di valori trigonometrici,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}dt = \frac{\pi}{3\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\,,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt = \frac{\pi}{4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,, \qquad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^5}dt = \frac{\pi}{5\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}} = \frac{\pi\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{25}\,.$$

Essendo le funzioni integrande razionali, questi integrali si possono anche calcolare trovando le primitive elementari, ma soltanto per $n=2$ la cosa è facile.



Si può trasformare la formula trovata in relazioni notevoli per le funzioni Beta e Gamma. Infatti con il cambio di variabili

$$t = \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{\beta}, \qquad dt = \beta\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{\beta-1}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}dx = \frac{\beta x^{\beta-1}}{(1-x)^{1+\beta}}dx\,,$$

che è un diffeomorfismo da $x\in\,]0,1[$ in $t\in\,]0,+\infty[$, possiamo scrivere, ricordando anche la definizione della funzione Beta e la sua relazione con la funzione Gamma,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{1/\beta}}dt &= \int_0^1\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\frac{\beta x^{\beta-1}}{(1-x)^{1+\beta}}dx = \beta\int_0^1\frac{x^{\beta-1}}{(1-x+x)(1-x)^{\beta}}dx = \\ &= \beta\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{(1-\beta)-1}dx = \beta B(\beta,1-\beta) = \beta\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta+1-\beta)} = \\ &= \beta\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\,,\end{aligned}$$

cioè la *formula dei complementi*

$$\boxed{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = B(\beta,1-\beta) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\beta\pi} \qquad \forall\theta\in\,]0,1[.}$$