Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 15 aprile 1999

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, Y uno spazio normato, $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ una funzione tale che per ogni $t \in X$ la funzione $y \mapsto f(t, y)$ sia differenziabile con continuità, e che per ogni $y \in Y$ la funzione $t \mapsto f(t, y)$ sia $\mathcal{M}$-misurabile e in $L^1(\mu)$. Poniamo $F(y) := \int_X f(t, y)\, d\mu(t)$ per $y \in Y$.

a. Dimostrare che per ogni $y_0, h \in Y$ la funzione $t \mapsto \partial_y f(t, y_0)[h]$ è $\mathcal{M}$-misurabile. (Scrivere $\partial_y f(t, y_0)[h]$ come limite di un rapporto incrementale).

b. Supponiamo che per ogni $y, h \in Y$ la funzione $t \mapsto \partial_y f(t, y)[h]$ sia in $L^1(\mu)$. Dimostrare che allora per ogni $y_0, h \in Y$ si ha

$$F(y_0 + h) - F(y_0) = \int_X \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\mu(t) + \\ + \int_X d\mu(t) \left(\int_{[0,1]} \Big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h] - \partial_y f(t, y_0)[h] \Big)\, d\theta \right).$$

(Teorema fondamentale del calcolo e differenziale delle funzioni composte).

c. Sia U un aperto convesso di Y e supponiamo che la funzione $t \mapsto \sup_{y \in U} \|\partial_y f(t, y)\|$ sia in $L^1(\mu)$ (la norma è quella operatoriale). Dimostrare che allora F è differenziabile con continuità su U e $\partial_y F(y_0)[h] = \int_X \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\mu(t)$ per ogni $y_0 \in U$, $h \in Y$.

2. Sia X lo spazio vettoriale formato dalle successioni reali $n \mapsto a_n$ definitivamente nulle, munito della norma di $\ell^2(\mathbb{N})$. Sia $n \mapsto b_n$ una successione reale qualsiasi e poniamo

$$\Lambda_b(a) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n \qquad \text{per } a \in X\,.$$

Dimostrare che Λ_b è ben definito su X, a valori reali, lineare, e che si equivalgono le tre condizioni:

a. La successione b è in $\ell^2(\mathbb{N})$.
b. Λ_b è continua da X in $\mathbb{R}$;
c. Il nucleo di Λ_b è chiuso in X;

Punti: 5+5+10, 20

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 15 aprile 1999

Svolgimento

1. Dire che per ogni $t \in X$ la funzione $y \mapsto f(t,y)$ è differenziabile significa che per ogni $t \in X$ e $y_0 \in Y$ esiste un'applicazione lineare continua $L_{t,y_0}\colon Y \to Y$ tale che

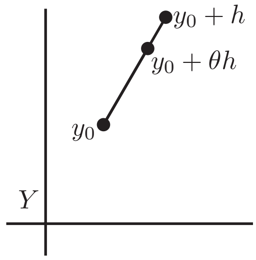
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t,y_0+h)-f(t,y_0)-L_{t,y_0}(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Useremo la notazione $L_{t,y_0}(h) =: \partial_y f(t,y_0)[h]$. Dire che $y \mapsto f(t,y)$ è differenziabile "con continuità" significa che per ogni $t \in X$ l'applicazione $y_0 \mapsto L_{t,y_0}$ è continua come funzione da Y nello spazio degli operatori lineari continui $Y \to Y$ con la norma operatoriale. Nel caso particolare in cui $Y = \mathbb{R}^n$, "differenziabile con continuità" equivale a dire che per ogni $t \in X$ esistono le derivate parziali delle componenti di f

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y_1, \dots y_n)$$

e che sono funzioni continue della n-upla $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$.

a. Sappiamo che il differenziale di una funzione calcolato nell'incremento h coincide con la *derivata direzionale* della funzione in quella direzione. Quindi per ogni $t \in X$, $y_0, h \in Y$ abbiamo



$$\partial_y f(t,y_0)[h] = \lim_{\theta\to 0} \frac{f(t,y_0+\theta h)-f(t,y_0)}{\theta}\,.$$

Calcoliamo il limite lungo una qualsiasi successione θ_n che tenda a 0 senza mai annullarsi, per esempio $\theta_n := 1/n$:

$$\partial_y f(t,y_0)[h] = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(t,y_0+h/n)-f(t,y_0)}{1/n}\,.$$

Poniamo

$$g_n(t,y_0,h) := \frac{f(t,y_0+h/n)-f(t,y_0)}{1/n}\,.$$

Per ogni y_0, h fissati, la funzione a valori reali $t \mapsto g_n(t,y_0,h)$ è $\mathcal{M}$-misurabile perché combinazione lineare delle funzioni misurabili per ipotesi $t \mapsto f(t,y_0+h/n)$ e $t \mapsto f(t,y_0)$. Dunque per ogni y_0, h fissati la funzione

$$t \mapsto \partial_y f(t,y_0)[h] = \lim_{n\to+\infty} g_n(t,y_0,h)$$

è $\mathcal{M}$-misurabile perché limite puntuale di una successione di funzioni misurabili.

b. Per ogni $t \in X$, $y_0, h \in Y$ la funzione di variabile reale

$$\theta \mapsto \varphi(\theta) := f(t,y_0+\theta h)$$

è composizione delle due funzioni $\theta \mapsto y_0 + \theta h$ e $y \mapsto f(t,y)$, entrambe differenziabili per ipotesi. Per la regola del differenziale delle funzioni composte la φ è derivabile e

$$\varphi'(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(t,y_0+\theta h) = \partial_y f(t,y_0+\theta h)[h]\,.$$

L'ultimo membro dell'uguaglianza è una funzione continua di θ, in quanto composizione delle funzioni continue $\theta \mapsto y_0 + \theta h$ e $y \mapsto \partial_y f(t,y)[h]$. Quindi la funzione $\theta \mapsto f(t, y_0 + \theta h)$ ha derivata continua, e possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo:

$$f(t, y_0 + h) - f(t, y_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(\theta)\, d\theta = \int_0^1 \partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h]\, d\theta\,.$$

Sotto il segno di integrale aggiungiamo e togliamo la quantità $\partial_y f(t, y_0)[h]$, che non dipende da θ:

$$\begin{aligned} f(t, y_0 + h) - f(t, y_0) &= \int_0^1 \Big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h] - \partial_y f(t, y_0)[h]\Big)\, d\theta + \int_0^1 \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\theta = \\ &= \int_0^1 \Big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h] - \partial_y f(t, y_0)[h]\Big)\, d\theta + \partial_y f(t, y_0)[h]\,. \end{aligned}$$

Per ipotesi per ogni $y_0, h \in Y$ le tre funzioni $t \mapsto f(t, y_0 + h)$, $t \mapsto f(t, y_0)$ e $t \mapsto \partial_y f(t, y_0)[h]$ sono in $L^1(\mu)$. Quindi anche la funzione

$$t \mapsto \int_0^1 \Big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h] - \partial_y f(t, y_0)[h]\Big)\, d\theta = f(t, y_0 + h) - f(t, y_0) - \partial_y f(t, y_0)[h]$$

è in $L^1(\mu)$. Integrandola su X si ottiene

$$\int_X \bigg(\int_0^1 \Big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h] - \partial_y f(t, y_0)[h]\Big)\, d\theta\bigg) d\mu(t) = F(y_0 + h) - F(y_0) - \int_X \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\mu(t)\,,$$

cioè la formula richiesta.

c. L'applicazione

$$L_{y_0}(h) := \int_X \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\mu(t)$$

è ovviamente lineare da Y in $\mathbb{R}$. Vediamo se è continua: per $y_0 \in U$ possiamo scrivere

$$\big\|\partial_y f(t, y_0)[h]\big\| \le \big\|\partial_y f(t, y_0)\big\| \cdot \|h\| \le \|h\| \cdot \sup_{y \in U} \big\|\partial_y f(t, y)\big\|\,,$$

da cui

$$\big|L_{y_0}(h)\big| = \bigg|\int_X \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\mu(t)\bigg| \le \int_X \Big|\partial_y f(t, y_0)[h]\Big|\, d\mu(t) \le \|h\| \cdot \underbrace{\int_X \bigg(\sup_{y \in U} \big\|\partial_y f(t, y)\big\|\bigg) d\mu(t)}_{<+\infty}\,.$$

Dunque $L_{y_0}\colon Y \to \mathbb{R}$ è davvero continua, ed è una candidata ad essere il differenziale di $y \mapsto F(y)$. Prendiamo una successione $h_n \to 0$ mai nulla e vediamo se la quantità

$$\frac{F(y_0 + h_n) - F(y_0) - L_{y_0}(h_n)}{\|h_n\|}$$

è infinitesima. Per il punto precedente questa quantità coincide con

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|h_n\|} \int_X \bigg(\int_{[0,1]} \Big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h_n)[h_n] - \partial_y f(t, y_0)[h_n]\Big)\, d\theta\bigg) d\mu(t) = \\ &\qquad = \int_X \bigg(\int_{[0,1]} \big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h_n) - \partial_y f(t, y_0)\big)\Big[\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big]\, d\theta\bigg) d\mu(t)\,. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\psi_n(\theta,t) := \big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h_n) - \partial_y f(t, y_0)\big)\Big[\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big],$$

di modo che

$$\frac{F(y_0+h_n) - F(y_0) - L_{y_0}(h_n)}{\|h_n\|} = \int_X \bigg(\int_{[0,1]} \psi_n(\theta,t)\,d\theta\bigg) d\mu(t).$$

Vogliamo dimostrare che questa quantità è infinitesima usando la convergenza dominata. Purtroppo non è chiarissimo se la funzione $(\theta,t) \mapsto \psi_n(\theta,t)$ sia misurabile rispetto allo spazio prodotto fra i misurabili secondo Lebesgue di $[0,1]$ ed $\mathcal{M}$ (punto da indagare per ulteriore **esercizio**). Quindi ci rassegnamo a lasciare l'integrale in forma iterata e applicare la convergenza dominata due volte. Per $t \in X$ fissato, per ipotesi la funzione $y \mapsto \partial_y f(t,y)$ è continua rispetto alla norma operatoriale. Poiché $y_0 + \theta h_n \to y_0$ per $n \to +\infty$ per ogni $\theta \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\big|\psi_n(\theta,t)\big| &= \bigg|\big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h_n) - \partial_y f(t, y_0)\big)\Big[\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big]\bigg| \le \\
&\le \big\|\partial_y f(t, y_0 + \theta h_n) - \partial_y f(t, y_0)\big\| \cdot \Big\|\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big\| = \\
&= \big\|\partial_y f(t, y_0 + \theta h_n) - \partial_y f(t, y_0)\big\| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } n \to +\infty \quad \forall \theta \in [0,1].
\end{aligned}$$

Dato che U è un intorno di y_0, per n abbastanza grande $y_0 + h_n$ appartiene a U, e visto che U è anche convesso, per ogni $\theta \in [0,1]$ anche $y_0 + \theta h_n \in U$. Dunque per n grande e $\theta \in [0,1]$ possiamo maggiorare

$$\big|\psi_n(\theta,t)\big| \le \big\|\partial_y f(t, y_0 + \theta h_n) - \partial_y f(t, y_0)\big\| \le 2 \sup_{y \in U} \big\|\partial_y f(t,y)\big\|.$$

Per μ-quasi ogni $t \in X$ l'ultimo membro è un numero reale finito, indipendente da n. Per il teorema della convergenza dominata applicato all'integrale di Lebesgue rispetto a θ quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \psi_n(\theta,t)\,d\theta = \int_{[0,1]} \Big(\lim_{n\to+\infty} \psi_n(\theta,t)\Big) d\theta = 0 \qquad \text{per quasi ogni } t \in X.$$

Posto

$$\xi_n(t) := \int_{[0,1]} \psi_n(\theta,t)\,d\theta,$$

abbiamo che ξ_n è in $L^1(\mu)$ per quanto già detto, $\xi_n(t) \to 0$ per $n \to +\infty$ per μ-quasi ogni $t \in X$, e inoltre

$$|\xi_n(t)| \le \int_{[0,1]} \big|\psi_n(\theta,t)\big|\,d\theta \le 1 \cdot 2 \sup_{y \in U} \big\|\partial_y f(t,y)\big\|.$$

Quest'ultimo membro non dipende da n e per ipotesi è in $L^1(\mu)$. Dunque, di nuovo per il teorema della convergenza dominata, questa volta rispetto alla misura μ,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(y_0+h_n) - F(y_0) - L_{y_0}(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n\to+\infty} \int_X \xi_n\,d\mu = \int_X \Big(\lim_{n\to+\infty} \xi_n\Big) d\mu = 0,$$

come volevasi dimostrare. Manca solo da verificare che il differenziale di F è continuo, cioè che la funzione $y_0 \mapsto \partial_y F(y_0)$ è continua da U nello spazio degli operatori lineari $Y \to \mathbb{R}$. Sia $y_n \in U$ una successione che converge a $\bar{y} \in U$. Vogliamo dimostrare che la quantità

$$\big\|\partial_y F(y_n) - \partial_y F(\bar{y})\big\| = \sup_{\substack{h \in Y \\ \|h\| \le 1}} \Big|\partial_y F(y_n)[h] - \partial_y F(\bar{y})[h]\Big|$$

è infinitesima per $n \to +\infty$. Esplicitiamo le $\partial_y F$:

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \left|\partial_y F(y_n)[h] - \partial_y F(\bar y)[h]\right| &= \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \left|\int_X \partial_y f(t,y_n)[h]\,d\mu(t) - \int_X \partial_y f(t,\bar y)[h]\,d\mu(t)\right| = \\ &= \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \left|\int_X \big(\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\big)[h]\,d\mu(t)\right| \le \\ &\le \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \int_X \left|\big(\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\big)[h]\right| d\mu(t) \le \\ &\le \int_X \big\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\big\| \cdot 1\,d\mu(t)\end{aligned}$$

Per ipotesi la funzione $y \mapsto \partial f(t,y)$ è continua, per cui

$$\big\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\big\| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } n \to +\infty \text{ per ogni } t \in X\,.$$

D'altra parte

$$\big\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\big\| \le 2\sup_{y\in U}\big\|\partial_y f(t,y)\big\|\,,$$

e quest'ultima è una funzione di t indipendente da n e in $L^1(\mu)$ per ipotesi. Pertanto

$$\begin{aligned}\big\|\partial_y F(y_n) - \partial_y F(\bar y)\big\| &= \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \left|\partial_y F(y_n)[h] - \partial_y F(\bar y)[h]\right| \le \\ &\le \int_X \big\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\big\|\,d\mu(t) \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty\,.\end{aligned}$$

2. Se a_n è una successione reale nulla per $n \ge N$ e b_n è una successione reale qualsiasi, allora

$$\Lambda_b(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n$$

è un numero reale ben definito perché solo un numero finito di addendi è non nullo. Se $a', a'' \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora esistono $N', N'' \in \mathbb{N}$ tali che $a'_n = 0$ per $n > N'$, $a''_n = 0$ per $n > N''$. Quindi $(\alpha a' + \beta a'')_n = \alpha a'_n + \beta a''_n = 0$ se $n > \max\{N', N''\}$, e allora

$$\begin{aligned}\Lambda_b(\alpha a' + \beta a'') &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha a' + \beta a'')_n b_n = \sum_{n=0}^{\max\{N',N'\}} (\alpha a'_n b_n + \beta a''_n b_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\max\{N',N'\}} \alpha a'_n b_n + \sum_{n=0}^{\max\{N',N'\}} \alpha a''_n b_n = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha a'_n b_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha a''_n b_n = \alpha\Lambda_b(a') + \beta\Lambda_b(a'')\,.\end{aligned}$$

Dunque $\Lambda_b\colon X \to \mathbb{R}$ è lineare.
a implica b. Supponiamo che la successione b sia in $\ell^2(\mathbb{N})$ e sia $a \in X \subset \ell^2(\mathbb{N})$. Allora per la disuguaglianza di Hölder (o di Schwarz) applicata alla serie (integrale rispetto alla misura del conteggio):

$$\big|\Lambda_b(a)\big| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|a_n b_n\big| \le \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2}\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2} = \|a\|_X \cdot \|b\|_{\ell^2}\,,$$

per cui Λ_b risulta continua.

b implica c. Se $\Lambda_b\colon X \to \mathbb{R}$ è continua, allora il suo nucleo $\Lambda_b^{-1}(\{0\})$ è chiuso perché controimmagine del chiuso $\{0\} \subset \mathbb{R}$ tramite la funzione continua Λ_b.
c implica a. Dimostriamo che la negazione di **a** implica la negazione di **c**. Negare **a** significa affermare che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^2 = +\infty\,.$$

Bisogna dimostrare che il nucleo di Λ_b non è chiuso, cioè che esiste una successione $a^{(k)} \in X$ tale che $\Lambda_b(a^{(k)}) = 0$ per ogni k, mentre $a^{(k)}$ converge in X (cioè in $\ell^2(\mathbb{N})$) a un $\bar a \in X$ che non sta nel nucleo di Λ:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a^{(k)} \in X \text{ e } \Lambda_b(a^{(k)}) = 0, \qquad \bar a \in X, \qquad \lim_{k\to+\infty} \big\|a^{(k)} - \bar a\big\|_{\ell^2} = 0\,, \qquad \Lambda_b(\bar a) \neq 0\,.$$

Proviamo un caso speciale semplice: prendiamo b_n identicamente uguale a 1. Poniamo, se $k \geq 1$,

$$a_n^{(k)} := \begin{cases} -1 & \text{se } n = 0, \\ 1/k & \text{se } 1 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{se } n > k. \end{cases}$$

Allora $a^{(k)}$ è in X perché $a_n^{(k)} \neq 0$ solo per un numero finito di n. Inoltre $a^{(k)}$ è nel nucleo di Λ_b per ogni $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \Lambda_b(a^{(k)}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{(k)} b_n = \sum_{n=0}^{k} a_n^{(k)} b_n = a_0^{(k)} b_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n^{(k)} b_n = -1\cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k}\cdot 1 = \\ &= -1 + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} 1 = -1 + \frac{1}{k}\cdot k = -1 + 1 = 0 \qquad \forall k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Se definiamo $\bar a$ come

$$\bar a_n := \begin{cases} -1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

allora $\bar a \in X$ perché $\bar a_n$ è nullo eccetto che per un numero finito di n, e

$$\begin{aligned} \big\|a^{(k)} - \bar a\big\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|a_n^{(k)} - \bar a_n\big|^2 = \big|a_0^{(k)} - \bar a_0\big|^2 + \sum_{n=1}^{k} \big|a_n^{(k)} - \bar a_n\big|^2 = \\ &= \big|(-1) - (-1)\big|^2 + \sum_{n=1}^{k} \Big|\frac{1}{k} - 0\Big|^2 = 0 + \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k} 1 = \frac{1}{k^2}\cdot k = \frac{1}{k}\,, \end{aligned}$$

per cui $a^{(k)} \to \bar a$ in $\ell^2(\mathbb{N})$ per $k \to +\infty$. Infine $\bar a$ non è nel nucleo di Λ_b:

$$\Lambda_b(\bar a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar a_n b_n = \bar a_0 b_0 = (-1)\cdot 1 = -1 \neq 0\,.$$

Veniamo al caso generale in cui l'unica ipotesi è $\sum b_n^2 = +\infty$. Siano n_1, n_2 rispettivamente il primo e il secondo indice per i quali $b_n \neq 0$. Poniamo

$$s_n := \sum_{k=n_2}^{n} b_k^2 \qquad \text{per } n \geq n_2\,.$$

È chiaro che $s_n > 0$ per $n \geq n_2$ e che $n \mapsto s_n$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$. Poniamo anche

$$a_n^{(k)} := \begin{cases} -1/b_{n_1} & \text{per } n = n_1, \\ b_n/s_k & \text{per } n_2 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \bar a_n := \begin{cases} -1/b_{n_1} & \text{per } n = n_1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Risulta che $a^{(k)} \in X$ perché $a_n^{(k)} \neq 0$ solo per un numero finito di $n \in \mathbb{N}$. Lo stesso per $\bar{a}$. Inoltre gli $a^{(k)}$ sono nel nucleo di Λ_b:

$$\Lambda_b\big(a^{(k)}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{(k)} b_n = \Big(-\frac{1}{b_{n_1}}\Big) b_{n_1} + \sum_{n=n_2}^{k} \frac{b_n}{s_k} \cdot b_n = -1 + \frac{1}{s_k} \sum_{n=n_2}^{k} b_n^2 = -1 + \frac{1}{s_k} \cdot s_k = -1 + 1 = 0\,,$$

e convergono ad $\bar{a}$ nella norma di $\ell^2(\mathbb{N})$ per $k \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\big\|a^{(k)} - \bar{a}\big\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|a_n^{(k)} - \bar{a}_n\big|^2 = \big|a_{n_1}^{(k)} - \bar{a}_{n_1}\big|^2 + \sum_{n=n_2}^{k} \big|a_n^{(k)} - \bar{a}_n\big|^2 = \\
&= \left|\Big(-\frac{1}{b_{n_1}}\Big) - \Big(-\frac{1}{b_{n_1}}\Big)\right|^2 + \sum_{n=n_2}^{k} \left|\frac{b_n}{s_k} - 0\right|^2 = 0 + \sum_{n=n_2}^{k} \frac{b_n^2}{s_k^2} = \frac{1}{s_k^2} \sum_{n=n_2}^{k} b_n^2 = \\
&= \frac{1}{s_k^2} \cdot s_k = \frac{1}{s_k} \longrightarrow 0 \qquad \text{per } k \to +\infty\,.
\end{aligned}$$

Infine $\bar{a}$ non è nel nucleo di Λ_b:

$$\Lambda_b(\bar{a}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{a}_n b_n = \bar{a}_{n_1} b_{n_1} = \Big(-\frac{1}{b_{n_1}}\Big) b_{n_1} = -1 \neq 0\,.$$