Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 16 febbraio 1999

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto e σ-compatto. Sia μ una misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}$, e sia $c \geq 0$. Dimostrare che $\mu(X) \leq c$ se e solo se per ogni $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto si ha che $\int_X |f| d\mu \leq c \sup_X |f|$.

2. Consideriamo la funzione

$$f(a) := \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{e^x - a} dx \,.$$

a. Dimostrare che $f(a)$ è ben definita per $a \in \,]-\infty, 1]$. Inoltre è di classe C^1 su $]-\infty, 1]$, ed è di classe C^∞ su $]-\infty, 1[$, e non ha derivata seconda (sinistra) finita per $a = 1$.

b. Dimostrare che per ogni $a \in [-1, 1]$ si ha che

$$f(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{n + n^3} \,.$$

(Usare la serie geometrica $1/(1-r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ per scrivere l'integrando di $f(a)$ come una serie di potenze in a, e poi integrare per serie, se si può).

Punti: 10, 10+10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 16 febbraio 1999

Svolgimento

1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto e σ-compatto. Sia μ una misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}$, e sia $c \geq 0$. Supponiamo che $\mu(X) \leq c$. Allora per ogni $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto possiamo scrivere

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \mu(X) \cdot \sup_X |f| \leq c \cdot \sup_X |f| \, .$$

Viceversa, supponiamo che per ogni $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto si abbia che $\int_X |f| \, d\mu \leq c \cdot \sup_X |f|$. Sia $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di compatti di X la cui unione sia X. Poiché l'unione finita di compatti è compatta, possiamo supporre che la successione sia crescente: $K_n \subseteq K_{n+1}$. Grazie al lemma di Urysohn per ogni n esiste una funzione $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto tale che $\chi_{K_n} \leq f_n \leq 1$. Integrando si ottiene

$$\mu(K_n) = \int_X \chi_{K_n} \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq c \cdot \sup_X |f_n| \leq c \, .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\mu(X) = \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(K_n) \leq c \, ,$$

come volevasi dimostrare.
Un altro modo di procedere è di chiedere che f_{n+1} valga 1 non solo su K_{n+1} ma anche sul supporto di f_n. Così la successione f_n *cresce con* n e converge puntualmente a 1 su tutto X e si può applicare il teorema della convergenza monotona:

$$\mu(X) = \int_X 1 \, d\mu = \int_X \Big(\lim_{n \to +\infty} f_n\Big) d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n| \, d\mu \leq \max\lim_{n \to +\infty} \Big(c \cdot \underbrace{\sup_X |f_n|}_{\leq 1}\Big) \leq c \, ,$$

2. a. Cominciamo dimostrando che per $a \leq 1$ l'integrale "improprio"

$$f(a) := \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{e^x - a} dx$$

converge. La funzione integranda dipendente dal parametro a

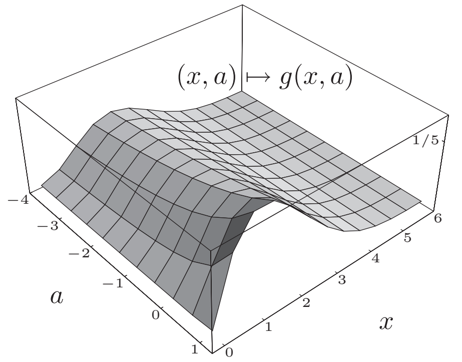
$$g(x, a) := \frac{1 - \cos x}{e^x - a}$$

è definita e continua dove non si annulla il denominatore. Per stabilire se ha integrale finito su $[0, +\infty[$ troviamo l'andamento asintotico negli eventuali punti in cui si annulla il denominatore, e per $x \to +\infty$. L'espressione $e^x - a$ non si annulla mai se $a \leq 0$; se $0 < a < 1$ si annulla per $x = \ln a$, che però cade fuori dall'intervallo di integrazione $[0, +\infty[$; se infine $a = 1$ la funzione integranda diventa

$$x \mapsto g(x, 1) = \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} \, ,$$

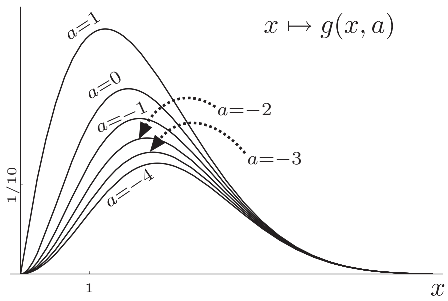
che non è definita per $x = 0$ (è una "forma 0/0"), però ha limite finito (nullo, per la precisione) per $x \to 0$, come si vede per esempio con l'espansione asintotica di Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1+o(x))}{(1+x+o(x))-1} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x+o(x)} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{o(1)}{1+o(1)} = 0\,.$$



Pertanto per $a \le 1$ la $x \mapsto g(x,a)$ ha integrale finito in un intorno destro di 0. L'andamento asintotico per $x \to +\infty$ è di tipo esponenziale decrescente per ogni $a \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{1-\cos x}{e^x - a}\right| \le \frac{2}{|e^x - a|}\,,$$



per cui la $x \mapsto g(x,a)$ ha sempre integrale finito in un intorno di $+\infty$. Conclusione: per $a \le 1$ la funzione $f(a)$ è ben definita. Non è richiesto dall'enunciato del problema, ma si vede che quando $a > 1$ allora la $x \mapsto g(x,a)$ diverge per $x = \ln a$ con un andamento non integrabile, eccetto che nei casi speciali in cui $\cos \ln a$ sia nullo, cioè nella successione di punti isolati $a = \exp(k\pi + \pi/2)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Come si comporta $f(a)$ per $a \to -\infty$? Quanto vale $f(0)$?

Per studiare la continuità di f osserviamo innanzitutto che la funzione $a \mapsto g(x,a)$ è continua su $]-\infty, 1]$ per ogni $x > 0$ (in realtà è continua nella coppia (x,a), ma qui non serve) ed è nonnegativa e crescente:

$$a_1 \le a_2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le g(x,a_1) = \frac{1-\cos x}{e^x - a_1} \le \frac{1-\cos x}{e^x - a_2} = g(x,a_2) \qquad \forall x > 0\,.$$

Quindi possiamo dominare uniformemente $x \mapsto g(x,a)$ per ogni $a \le 1$ con $g(x,1)$:

$$\sup_{a\le 1} \big|g(x,a)\big| = g(x,1) \qquad \forall x > 0\,.$$

Poiché sappiamo che $g(\,\cdot\,,1) \in L^1([0,+\infty[)$, deduciamo dalla convergenza dominata che $a \mapsto f(a)$ è continua per $a \le 1$.

Studiamo la derivabilità di f:

$$\frac{\partial g}{\partial a}(x,a) = -\frac{1-\cos x}{(e^x - a)^2} \cdot (-1) = \frac{1-\cos x}{(e^x-a)^2}\,.$$

Questa derivata parziale è continua rispetto ad $a \le 1$ per ogni $x > 0$. Anch'essa è nonnegativa e crescente rispetto ad a:

$$a_1 \le a_2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{\partial g}{\partial a}(x,a_1) \le \frac{\partial g}{\partial a}(x,a_2) \qquad \forall x > 0\,.$$

Quindi possiamo dominare uniformemente $\partial g/\partial a$ col valore per $a = 1$:

$$\sup_{a\le 1} \left|\frac{\partial g}{\partial a}(x,a)\right| = \frac{\partial g}{\partial a}(x,1) \qquad \forall x > 0\,,$$

e la funzione

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial a}(x,1) = \frac{1-\cos x}{(e^x - a)^2}$$

è in $L^1([0,+\infty[)$. Infatti è continua su $]0,+\infty[$, ha andamento esponenziale decrescente per $x \to +\infty$, ed ha limite finito per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2/2+o(x^3))}{(1+x+o(x)-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1/2+o(1)}{1+o(1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Quindi per i teoremi di derivazione sotto il segno di integrale la $f(a)$ è di classe C^1 su $]-\infty,1]$ e

$$f'(a) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial a}(x,a)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{(e^x-a)^2}dx \qquad \forall a \le 1\,.$$

Si trova per induzione la formula generale per la derivata parziale n-esima di $g(x,a)$ rispetto ad a:

$$\frac{\partial^n g}{\partial a^n}(x,a) = n!\frac{1-\cos x}{(e^x-a)^{n+1}}\,.$$

Questa espressione è sempre continua nella coppia (x,a) per $x>0$ ed $a\le 1$, ed è nonnegativa e crescente rispetto ad $a \le 1$. Possiamo ancora maggiorare uniformemente col valore per $a=1$:

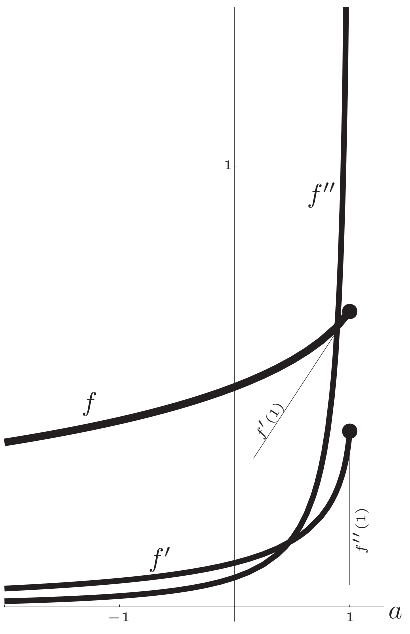
$$\sup_{a\le 1}\left|\frac{\partial^n g}{\partial a^n}(x,a)\right| = \frac{\partial^n g}{\partial a^n}(x,1) \qquad \forall x>0\,,$$

però la funzione

$$x \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial a^n}(x,1) = n!\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^{n+1}}$$

non è più in $L^1(]0,+\infty[)$ quando $n\ge 2$. Infatti per $x\to 0$

$$\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^{n+1}} = \frac{1-(1-x^2/2+o(x^3))}{(1+x+o(x)-1)^{n+1}} = \frac{x^2/2+o(x^2)}{x^{n+1}+o(x^{n+1})} = \frac{1}{x^{n-1}}\cdot\frac{1/2+o(1)}{1+o(1)}\,.$$



Fissato $a_0<1$ possiamo accontentarci di maggiorare uniformemente per $a\le a_0$:

$$\sup_{a\le a_0}\left|\frac{\partial^n g}{\partial a^n}(x,a)\right| = \frac{\partial^n g}{\partial a^n}(x,a_0) = n!\frac{1-\cos x}{(e^x-a_0)^{n+1}} \qquad \forall x>0\,,$$

e ora la funzione dominante

$$x \mapsto n!\frac{1-\cos x}{(e^x-a_0)^{n+1}}$$

è in $L^1(]0,+\infty[)$ per ogni $n\ge 0$ perché è continua su tutto $[0,+\infty[$ ed ha andamento asintotico esponenziale decrescente per $x\to+\infty$. Possiamo concludere che $a\mapsto f(a)$ è derivabile infinite volte per $a\le a_0$ per ogni $a_0<1$, cioè f è di classe C^∞ su $]-\infty,1[$, e vale la formula di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \int_0^{+\infty}\frac{\partial^n g}{\partial a^n}(x,a)\,dx = \\ &= \int_0^{+\infty} n!\frac{1-\cos x}{(e^x-a)^{n+1}}\,dx \qquad \forall n\ge 2 \quad \forall a<1\,. \end{aligned}$$

I ragionamenti fatti finora non escludono che possa esistere comunque la derivata seconda (sinistra) $f''(1)$. Proviamo a calcolare il limite di $f''(a)$ per $a\to 1^-$:

$$\lim_{a\to 1^-} f''(a) = \lim_{a\to 1^-}\int_0^{+\infty}2\frac{1-\cos x}{(e^x-a)^3}\,dx \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty}\left(\lim_{a\to 1^-}2\frac{1-\cos x}{(e^x-a)^3}\right)dx\,.$$

Si può passare al limite sotto al segno di integrale? Di sicuro il teorema di convergenza dominata non si applica, perché la funzione limite sappiamo bene che non è in $L^1([0,+\infty[)$. La convergenza monotona invece va bene, perché sappiamo che la funzione integranda è positiva e cresce quando a cresce, per $x > 0$. Pertanto

$$\lim_{a\to 1^-} f''(a) = \lim_{a\to 1^-} \int_0^{+\infty} 2\frac{1-\cos x}{(e^x-a)^3}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{a\to 1^-} 2\frac{1-\cos x}{(e^x-a)^3}\right) dx = \int_0^{+\infty} 2\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^3} dx = +\infty\,.$$

Non esiste dunque derivata seconda (finita) di f in 1, perché per esempio facendo il limite del rapporto incrementale e usando la regola de l'Hôpital

$$f''(1) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to 1^-} \frac{f'(a)-f'(1)}{a-1} = \lim_{a\to 1^-} \frac{f''(a)}{1} = +\infty\,.$$

b. Partiamo dalla formula della serie geometrica:

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \qquad \forall r \in\,]-1,1[\,.$$

La formula si può applicare alla nostra funzione integranda $g(x,a)$:

$$g(x,a) = \frac{1-\cos x}{e^x-a} = \frac{1-\cos x}{e^x} \cdot \frac{1}{1-\underbrace{ae^{-x}}_{=r}}\,.$$

Se prendiamo $|a| \le 1$ e $x > 0$ allora $|ae^{-x}| < |a| \le 1$, e quindi

$$g(x,a) = \frac{1-\cos x}{e^x} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(ae^{-x}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(1-\cos x)a^n e^{-nx-x}}_{=:h_n(x)} \qquad \forall x > 0 \quad \forall a \in [-1,1]\,.$$

(Nella notazione $h_n(x)$ abbiamo tralasciato di indicare la dipendenza da a). Il problema è ora se si possa o no integrare per serie:

$$f(a) = \int_0^{+\infty} g(x,a)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x)\right) dx \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx\,.$$

La risposta è facilmente "sì" quando $0 \le a \le 1$, perché allora la serie è a termini positivi. Per $|a| < 1$ pure la risposta è positiva, in quanto converge la serie delle norme in L^1:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \|h_n\|_{L^1([0,+\infty[)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left|(1-\cos x)a^n e^{-nx-x}\right| dx \le \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2\,|a|^n\, e^{-nx-x}\,dx = \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \int_0^{+\infty} e^{-nx-x}\,dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \left[\frac{e^{-nx-x}}{-n-1}\right]_{x=0}^{+\infty} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a|^n}{n+1} \le \\ &\le 2\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{2}{1-|a|} < +\infty\,.\end{aligned}$$

Quindi per $-1 < a \le 1$ si può integrare per serie:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1-\cos x)a^n e^{-nx-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \int_0^{+\infty} (1-\cos x)e^{-nx-x}\,dx\,.$$

Tutto si riconduce a calcolare gli integrali

$$\int_0^{+\infty} (1-\cos x)e^{-nx-x}\,dx \qquad \text{per } n \in \mathbb{N}\,.$$

Cerchiamo una primitiva della forma $(A + B\cos x + C\,\mathrm{sen}\,x)e^{-nx-x}$. Deriviamo:

$$\begin{aligned} D\big((A+B\cos x + C\,\mathrm{sen}\,x)e^{-nx-x}\big) &= \big(-B\,\mathrm{sen}\,x + C\cos x - (n+1)(A+B\cos x + C\,\mathrm{sen}\,x)\big)e^{-nx-x} = \\ &= \Big(-(n+1)A + \big(C-(n+1)B\big)\cos x - \big(B+(n+1)C\big)\,\mathrm{sen}\,x\Big)e^{-nx-x}\,. \end{aligned}$$

Uguagliando si ottiene un sistema lineare nelle incognite A, B, C:

$$\begin{cases} -(n+1)A = 1 \\ C-(n+1)B = -1 \\ B+(n+1)C = 0 \end{cases} \qquad \text{che si risolve in} \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{n+1} \\ B = \dfrac{n+1}{1+(n+1)^2} \\ C = -\dfrac{1}{1+(n+1)^2}\,. \end{cases}$$

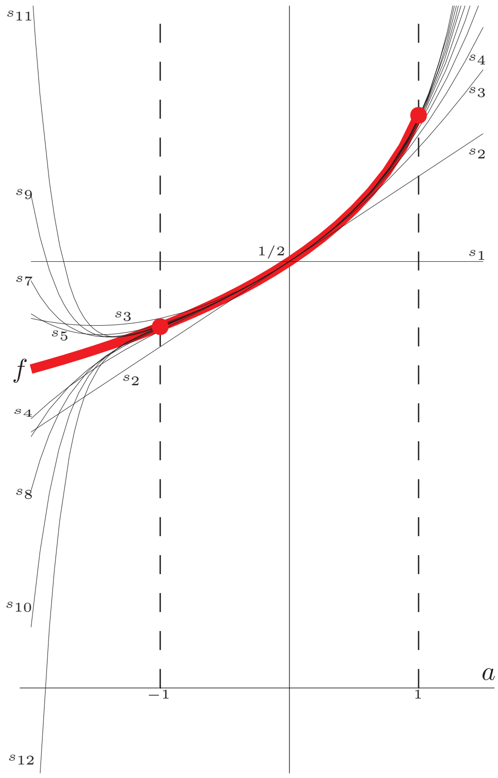
Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1-\cos x)e^{-nx-x}\,dx &= \Big[(A+B\cos x - C\,\mathrm{sen}\,x)e^{-nx-x}\Big]_0^{+\infty} = -A-B = \\ &= \frac{1}{(n+1)(1+(n+1)^2)}\,. \end{aligned}$$

Abbiamo stabilito che

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{(n+1)(1+(n+1)^2)} = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{k-1}}{k+k^3} \qquad \forall a \in\,]-1,1] \end{aligned}$$

(l'ultima somma si ottiene dalla precedente col cambio di indice $n+1=k$). La figura qui accanto mostra il grafico di f (in grassetto) con sovrapposti quelli delle prime somme parziali della serie (sottili):



$$s_n(a) := \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{k-1}}{k+k^3}\,.$$

Per vedere se l'uguaglianza fra funzione e serie vale anche per $a=-1$ notiamo che f è continua su tutto $[-1,1]$, e che anche la serie

$$a \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{k-1}}{k+k^3}$$

è continua su $[-1,1]$ in quanto la serie è di addendi continui e converge totalmente:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{-1\le a\le 1} \left|\frac{a^{k-1}}{k+k^3}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+k^3} < +\infty\,.$$

Passando al limite per $a \to -1^+$ si ottiene che

$$f(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{k-1}}{k+k^3} \qquad \forall a \in [-1,1]\,.$$

Un altro modo di decidere il caso $a = -1$ è quello di riciclare il calcolo di $\int (1-\cos x)e^{-nx-x}dx$ per affinare la stima di $\sum \|h_n\|_{L^1}$, anzi, per calcolarla esattamente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|h_n\|_{L^1([0,+\infty[)} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \int_0^{+\infty} \underbrace{(1-\cos x)e^{-nx-x}}_{\geq 0}\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a|^{k-1}}{k+k^3}\,,$$

che è finito se e solo se $|a| \leq 1$. Notare che l'insieme di convergenza della serie è strettamente più piccolo dell'insieme di definizione di f.