Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 30 settembre 1998

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $x > 0$ poniamo

$$f_n(x) := \int_0^n t^{x-1}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \, dt\,.$$

a. Dimostrare che $0 \le (1 - t/n)^n \le e^{-t}$ per ogni $n > 0$ e $t \in [0, n]$, e dedurne che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt =: \Gamma(x) \quad \text{per ogni } x > 0\,.$$

(La funzione esponenziale è convessa...).

b. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x > 0$ valgono le relazioni

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{x+1} f_{n-1}(x+1)\,, \qquad f_n(x) = \frac{n! \cdot n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}\,.$$

(Integrare per parti e cambiare variabile).

c. Mostrare che

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{k^2}\Big) \quad \forall x \in \,]0,1[\,.$$

Dedurne che $2/\pi = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - 1/(4k^2))$.

2. Sia $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare. Dimostrare che se $E \subseteq \mathbb{R}^m$ è boreliano allora lo è anche $T^{-1}(E)$. Nell'ulteriore ipotesi che $m \le n$, e che T sia di rango massimo, ogniqualvolta $E \subseteq \mathbb{R}^m$ è misurabile secondo Lebesgue, lo è anche $T^{-1}(E)$.
(Per la seconda parte, costruire $R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineari e invertibili tali che $STR = P$, dove $P(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ con $p \le m$).

Punti: 10+10+10, 20.

Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

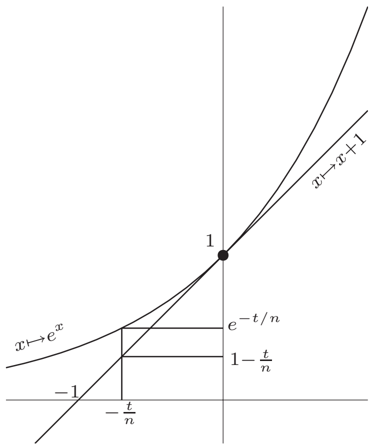
Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

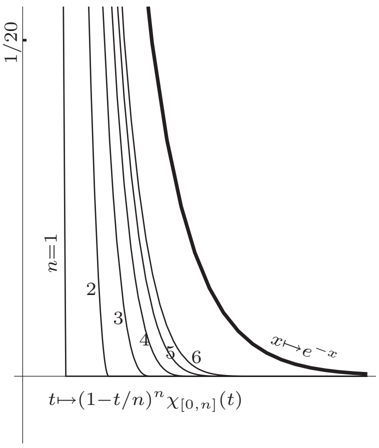
Prova Scritta del 30 settembre 1998

Svolgimento

1. a. La disuguaglianza $(1-t/n)^n \geq 0$ è ovvia per $t \leq n$. Per dimostrare che $(1-t/n)^n \leq e^{-t}$ usiamo il fatto noto che la funzione esponenziale è convessa, e quindi il suo grafico giace al di sopra di ogni sua retta tangente. Prendiamo in particolare la retta tangente nel punto $(0,1)$, che ha equazione $y-1 = \exp'(0)(x-0) = 1\cdot(x-0)$. Dunque

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$





Ponendo $x = -t/n$ si ha $e^{-t/n} \geq 1-t/n$. Quando $t \leq n$ i due membri sono positivi e possiamo elevare alla n, ottenendo

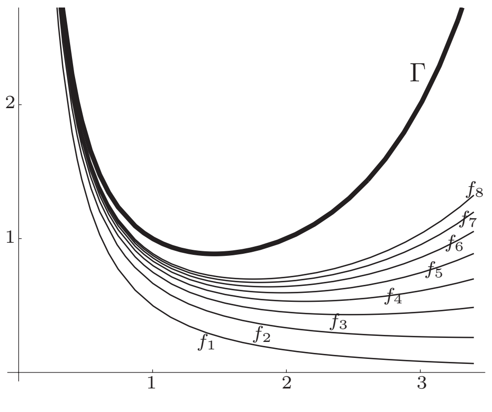
$$e^{-t} \geq \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \qquad \text{per ogni } t \leq n\,.$$

Veniamo ora alla convergenza delle f_n verso Γ. Riconduciamo gli integrali allo stesso insieme introducendo la funzione caratteristica di $[0,n[$:

$$f_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n dt = \int_{\mathbb{R}} t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \chi_{[0,n[}(t)\,dt\,.$$

Stimiamo l'estremo superiore degli integrandi al variare di n (qui x è fisso):

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\chi_{[0,n[}(t)\right| \leq t^{x-1}e^{-t}\,.$$



Ora la funzione $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ è in $L^1([0,+\infty[)$ per ogni $x>0$ fissato (la verifica è facile ed è stata fatta comunque durante lo studio della funzione Γ). Vediamo la convergenza puntuale degli integrandi: usando il fatto che $\chi_{[0,n[}(t) = 1$ per ogni $n > t$ (e quindi definitivamente in n) e poi (per esempio) la formula di Taylor $\ln(1+s) = s + o(s)$ per $s \to 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\chi_{[0,n[}(t) &= \lim_{n\to+\infty} t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n = \\
&= t^{x-1}\lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n = t^{x-1}\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-t/n)} = \\
&= t^{x-1}\lim_{n\to+\infty} e^{n(-t/n+o(1/n))} = \\
&= t^{x-1}\lim_{n\to+\infty} e^{-t+o(1)} = t^{x-1}e^{-t} \qquad \forall s \in [0,+\infty[\,.
\end{aligned}$$

Possiamo dunque passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \chi_{[0,n[}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\Big(\lim_{n\to+\infty} t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\chi_{[0,n[}(t)\Big)dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x)\,.\end{aligned}$$

Per dimostrare la convergenza (che è lenta) si può anche usare il teorema di convergenza monotona invece di quello della convergenza dominata se si dimostra che la successione $n \mapsto (1-t/n)^n\chi_{[0,n]}(t)$ è crescente (e non negativa) rispetto a n per ogni $t > 0$ fissato. Questo non è difficile: basta derivare rispetto a n e usare il fatto che il logaritmo è concavo. Nella figura in basso nella pagina precedente si vedono il grafico di Γ insieme a quelli delle prime approssimanti f_n.

b. Integriamo per parti, per $n \geq 2$, e usiamo il fatto che $x > 0$:

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \int_0^n t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n dt = \int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \frac{d}{dt}\frac{t^x}{x}\,dt = \\ &= \Big[\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\frac{t^x}{x}\Big]_{t=0}^n - \int_0^n n\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^{n-1}\Big(-\frac{1}{n}\Big)\frac{t^x}{x}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^n t^x\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^{n-1}dt\,.\end{aligned}$$

Per far assomigliare l'integrale a f_{n+1} facciamo il cambio di variabili lineare $t/n = s/(n-1)$, per il quale $dt = n\,ds/(n-1)$:

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \frac{1}{x}\int_0^{n-1}\Big(\frac{ns}{n-1}\Big)^x\Big(1-\frac{s}{n-1}\Big)^{n-1}\frac{n}{n-1}\,ds = \\ &= \frac{1}{x}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{x+1}\int_0^{n-1} s^x\Big(1-\frac{s}{n-1}\Big)^{n-1}ds = \frac{1}{x}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{x+1}\int_0^{n-1} s^{(x+1)-1}\Big(1-\frac{s}{n-1}\Big)^{n-1}ds = \\ &= \frac{1}{x}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{x+1} f_{n-1}(x+1)\,.\end{aligned}$$

Per verificare la formula

$$f_n(x) = \frac{n!\cdot n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \qquad \text{per ogni } x > 0, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

cominciamo dal caso $n = 1$:

$$f_1(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)\,dt = \int_0^1 (t^{x-1}-t^x)\,dt = \Big[\frac{t^x}{x} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\Big]_{t=0}^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}\,,$$

$$\frac{1!\cdot 1^x}{\prod_{k=0}^1 (x+k)} = \frac{1}{x(x+1)}\,.$$

Supponiamo poi che sia vera per un certo $n-1 \geq 1$ e dimostriamo che vale anche per n:

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \frac{1}{x}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{x+1} f_{n-1}(x+1) = \frac{1}{x}\cdot\frac{n^x n}{(n-1)^{x+1}}\cdot\frac{(n-1)!\cdot(n-1)^{x+1}}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+1+k)} = \\ &= \frac{n!\cdot n^x}{x}\cdot\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+\underbrace{1+k}_{=j})} = \frac{n!\cdot n^x}{x}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^n (x+j)} = \frac{n!\cdot n^x}{(x+0)}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^n (x+j)} = \\ &= \frac{n!\cdot n^x}{\prod_{j=0}^n (x+j)}\,.\end{aligned}$$

c. Usando i punti precedenti possiamo scrivere che per $x \in\,]0,1[$

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{f_n(x)f_n(1-x)}\,.$$

Sviluppiamo dunque a parte il termine $1/(f_n(x)f_n(1-x))$. Cambiamo indice nelle produttorie per mettere in evidenza il prodotto notevole $(j+x)(j-x)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{f_n(x)f_n(1-x)} &= \left(\frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!\cdot n^x}\right)\cdot\left(\frac{\prod_{k=0}^{n}(1-x+k)}{n!\cdot n^{1-x}}\right) = \frac{1}{n!^2\cdot n}\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)\cdot\left(\prod_{k=0}^{n}(\underbrace{k+1}_{=j}-x)\right) = \\
&= \frac{1}{n!^2\cdot n}\left(\prod_{j=0}^{n}(j+x)\right)\cdot\left(\prod_{j=1}^{n+1}(j-x)\right) = \frac{(0+x)(n+1-x)}{n!^2\cdot n}\prod_{j=1}^{n}\big((j+x)(j-x)\big) = \\
&= \frac{x(n+1-x)}{n!^2\cdot n}\prod_{j=1}^{n}(j^2-x^2) = \frac{x(n+1-x)}{(\prod_{j=1}^{n}j)^2\cdot n}\prod_{j=1}^{n}(j^2-x^2) = \frac{x(n+1-x)}{(\prod_{j=1}^{n}j^2)\cdot n}\prod_{j=1}^{n}(j^2-x^2) = \\
&= \frac{x(n+1-x)}{n}\prod_{j=1}^{n}\frac{j^2-x^2}{j^2} = \frac{x(n+1-x)}{n}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right).
\end{aligned}
$$

Isoliamo l'ultima produttoria:

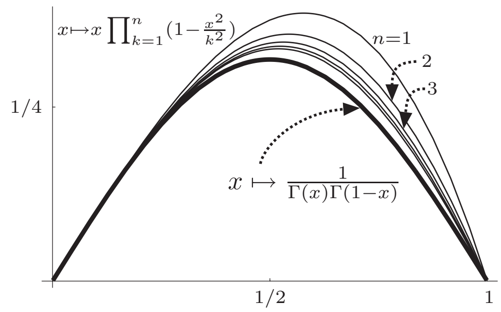
$$\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right) = \frac{1}{f_n(x)f_n(1-x)}\cdot\frac{n}{x(n+1-x)}.$$

Il secondo membro ha limite per $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{f_n(x)f_n(1-x)}\cdot\frac{n}{x(n+1-x)}\right) = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)},$$

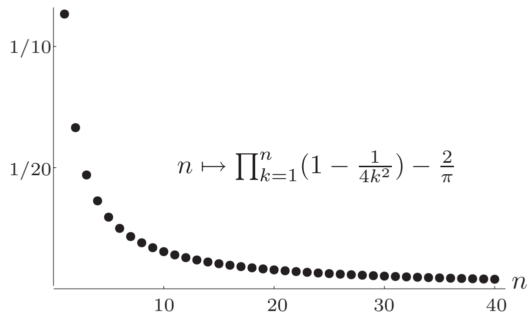
per cui la produttoria ha pure limite per $n\to+\infty$ e possiamo scrivere

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right).$$



La figura qui accanto fa vedere i grafici di alcuni prodotti parziali e della funzione limite. Qualora il grafico di quest'ultima sembri vagamente familiare, è segno che si ha buon occhio. Infatti si può dimostrare che vale la relazione notevole

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi}\qquad\forall x\in\,]0,1[\,.$$



Tornando a noi, ponendo $x=1/2$ nella produttoria e ricordando che $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\Gamma(1/2)\Gamma(1-1/2)} = \\
&= \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{(1/2)^2}{j^2}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4j^2}\right),
\end{aligned}
$$

da cui infine

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4j^2}\right).$$

La seconda figura qui sopra mostra l'andamento della differenza fra i prodotti parziali $n\mapsto\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{4j^2})$ e il limite $2/\pi$. Si noterà che la convergenza non è molto veloce.

2. Un'applicazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ è automaticamente continua. Le funzioni continue sono anche boreliane, cioè $E \in \mathcal{B}_m$ implica $T^{-1}(E) \in \mathcal{B}_n$ ($\mathcal{B}_k$ è l'insieme dei boreliani, e $\mathcal{M}_k$ sarà l'insieme dei misurabili secondo Lebesgue, e τ_k l'insieme degli aperti, sempre in $\mathbb{R}^k$). Per chi non se lo ricorda è un fatto facile da dimostrare: sia

$$\mathcal{S} := \{E \subseteq \mathbb{R}^m \mid T^{-1}(E) \in \mathcal{B}_n\}.$$

Tutti gli aperti di $\mathbb{R}^m$ sono in $\mathcal{S}$ perché la contrimmagine di un aperto tramite una funzione continua è aperto, come già detto. $\mathcal{S}$ verifica la definizione di σ-algebra:

$$\varnothing \in \mathcal{S} \quad \text{perché} \quad T^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau_n \subset \mathcal{B}_n\,,$$

$$(\forall k \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{S}) \Rightarrow T^{-1}\Bigl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Bigr) = \Bigl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{T^{-1}(E_k)}_{\in\mathcal{B}_n}\Bigr) \in \mathcal{B}_n \Rightarrow \Bigl(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Bigr) \in \mathcal{S}\,,$$

$$E \in \mathcal{S} \Rightarrow T^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus E) = T^{-1}(\mathbb{R}^m) \setminus T^{-1}(E) = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{T^{-1}(E)}_{\in\mathcal{B}_n} \in \mathcal{B}_n \Rightarrow \mathbb{R}^m \setminus E \in \mathcal{B}_n\,.$$

Essendo $\mathcal{S}$ una σ-algebra contenente gli aperti di $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{S}$ contiene tutti i boreliani.
Supponiamo ora che $m \le n$ e che possiamo scrivere $STR = P$, dove $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono lineari invertibili e $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è la proiezione sulle prime m componenti:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) := (x_1, x_2, \dots, x_m)\,.$$

Poiché S e R sono invertibili, $T = S^{-1}PR^{-1}$. Dato $E \in \mathcal{M}_m$ si ha

$$T^{-1}(E) = S\bigl(P^{-1}(R(E))\bigr)\,.$$

Si sa che R ed S, essendo lineari invertibili, trasformano insiemi misurabili secondo Lebesgue in misurabili secondo Lebesgue (nelle rispettive dimensioni). Per dimostrare che $T^{-1}(E) \in \mathcal{M}_n$ basterà quindi verificare che $P^{-1}(F) \in \mathcal{M}_n$ per ogni $F \in \mathcal{M}_m$. In altre parole, ci siamo ricondotti a dimostrare la tesi nel caso particolare di operatori del tipo P.
Sia allora $E \in \mathcal{M}_m$. Quando $E \in \mathcal{B}_m$ allora $P^{-1}(E) \in \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$ perché P è continua (già visto). In generale se $E \in \mathcal{M}_n$ esistono $F, G \in \mathcal{B}_m$ tali che $F \subseteq E \subseteq G$ e $\lambda_m(G \setminus F) = 0$. Passando alle contrimmagini tramite P:

$$\underbrace{P^{-1}(F)}_{\in\mathcal{B}_n} \subseteq P^{-1}(E) \subseteq \underbrace{P^{-1}(G)}_{\in\mathcal{B}_n}, \qquad P^{-1}(G) \setminus P^{-1}(F) = P^{-1}(G \setminus F) \in \mathcal{B}_n\,.$$

Se dimostriamo che $\lambda_n(P^{-1}(G \setminus F)) = 0$ siamo a posto, perché lo spazio di misura di Lebesgue è completo. Per questo sfruttiamo la particolare struttura di P:

$$P^{-1}(G \setminus F) = \Bigl\{(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \Bigm| (x_1, \dots, x_m) \in G \setminus F\Bigr\} = (G \setminus F) \times \mathbb{R}^{n-m}\,.$$

L'insieme $(G \setminus F) \times \mathbb{R}^{n-m}$ è un rettangolo misurabile nello spazio prodotto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, per cui la sua misura è semplicemente

$$\lambda_n\bigl(P^{-1}(G \setminus F)\bigr) = \lambda_n\bigl((G \setminus F) \times \mathbb{R}^{n-m}\bigr) = \lambda_m\bigl(G \setminus F\bigr) \cdot \lambda_{n-m}(\mathbb{R}^{n-m}) = 0 \cdot (+\infty) = 0\,,$$

col quale è dimostrato che $P^{-1}(E) \in \mathcal{M}_n$.
Rimane da vedere che possiamo sempre trovare S, R con le proprietà richieste. Questo è un fatto di algebra lineare, che possiamo dimostrare brevemente. Sia M un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ complementare al nucleo di T. Poiché T ha rango massimo, la dimensione di M è uguale alla dimensione dell'immagine di T, cioè m. Inoltre T è iniettiva su M, perché se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ e $T\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ allora $T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, da cui $M \ni \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \ker T$, e infine $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ perché M è complementare a $\ker T$. T è anche suriettiva da M a $\mathbb{R}^m$ perché M e $\mathbb{R}^m$ hanno la stessa dimensione. Siano $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_m$ una base di M. Allora

$$\text{i vettori} \quad T\boldsymbol{f}_1, T\boldsymbol{f}_2, \dots, T\boldsymbol{f}_m \quad \text{sono una base di } \mathbb{R}^m\,.$$

Siano $\boldsymbol{f}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{f}_n$ una base del nucleo di T. Allora $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$ e

$$T\boldsymbol{f}_i = \mathbf{0} \qquad \text{per } i = m+1, \dots, n.$$

Sia $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots \boldsymbol{e}_m$ la base canonica di $\mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \dots, \boldsymbol{h}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Definiamo S, R lineari tramite la loro azione su basi dei rispettivi spazi:

$$S\boldsymbol{e}_i := \boldsymbol{f}_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n, \qquad R(T\boldsymbol{f}_j) := \boldsymbol{h}_j \quad \text{per } j = 1, \dots, m\,.$$

Queste S, R sono invertibili perché mappano basi su basi. Osserviamo ora come agisce la composizione RTS sulla base $\boldsymbol{e}_i$:

$$RTS\boldsymbol{e}_i = RT\boldsymbol{f}_i = \begin{cases} \boldsymbol{h}_i & \text{se } 0 \le i \le m, \\ R\mathbf{0} = \mathbf{0} & \text{se } m < i \le n, \end{cases} \quad \text{o, in altre parole,} \quad \boldsymbol{e}_i \xrightarrow{S} \boldsymbol{f}_i \xrightarrow{T} \begin{cases} T\boldsymbol{f}_i \xrightarrow{R} \boldsymbol{h}_i & \text{se } 0 \le i \le m, \\ \mathbf{0} \xrightarrow{R} \mathbf{0} & \text{se } i < m \le n, \end{cases}$$

che è precisamente quello che volevamo.
Se togliamo l'ipotesi che T sia di rango massimo non è più detto che la contrimmagine di misurabili secondo Lebesgue sia misurabile secondo Lebesgue. Prendiamo per esempio $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$T(x_1, x_2, x_3) := (x_1, 0)\,.$$

Sia $V \subset \mathbb{R}$ un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Allora $E := V \times \{0\} = \{(x, 0) \mid x \in V\} \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ perché sottinsieme di $\mathbb{R} \times \{0\}$, che è un (rettangolo) misurabile di misura nulla in $\mathbb{R}^2$. Però la contrimmagine

$$T^{-1}(E) = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, 0) \in E = V \times \mathbb{R}\big\} = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in V\big\} = V \times \mathbb{R}^2$$

non è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^3$. Infatti per ogni $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ la "sezione orizzontale" $\{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2, x_3) \in V \times \mathbb{R}^2\} = V$ è non misurabile in $\mathbb{R}$, mentre è noto che quasi tutte le sezioni orizzontali di misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ sono misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^{k_1}$.