Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 7 settembre 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione a supporto compatto, limitata e tale che per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (rispetto alla misura di Lebesgue) esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\sup_E \text{uno}\, f := \inf_{x\in E}\Big(\sup_{E\setminus\{x\}} f\Big), \qquad \inf_E \text{uno}\, f := \sup_{x\in E}\Big(\inf_{E\setminus\{x\}} f\Big).$$

Per $m \in \mathbb{N}$ consideriamo la nota famiglia di cubi binari disgiunti $\Omega_m := 2^{-m}\{x+[0,1[^n \ : x \in \mathbb{Z}^n\}$ e poniamo

$$g_m := \sum_{Q\in\Omega_m} \chi_Q \inf_Q \text{uno}\, f, \qquad h_m := \sum_{Q\in\Omega_m} \chi_Q \sup_Q \text{uno}\, f.$$

a. Se E ha almeno tre punti distinti allora $\inf_E f \le \inf \text{uno}_E f \le \sup \text{uno}_E f \le \sup_E f$.

b. Dimostrare che $\inf \text{uno}_E f \le f(x) \le \sup \text{uno}_E f$ per tutti gli $x \in E$ esclusi al più due.

c. Dimostrare che $g_m(x) \le f(x) \le h_m(x)$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$ eccetto al più un numero finito.

d. Sia x_0 uno dei punti per i quali esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e sia $\varepsilon > 0$. Dimostrare che se U è un qualsiasi intorno abbastanza piccolo di x_0 allora

$$0 \le \sup_U \text{uno}\, f - \inf_U \text{uno}\, f \le \varepsilon.$$

e. Dimostrare che $h_m(x) - g_m(x) \to 0$ per $m \to +\infty$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

f. Dimostrare che f è integrabile secondo Riemann.

g. Dimostrare che f è continua in quasi ogni punto di $\mathbb{R}^n$.

h. Dimostrare che f è automaticamente limitata qualora il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esista finito per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. (Adattare la dimostrazione del teorema di Weierstraß).

2. Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{n!\cdot 2^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4}.$$

(Sviluppare il seno in serie di Taylor, integrare per serie, se si può, e usare le formule note per la funzione Γ).

Punti: 5+5+5+5+5+5+2+4, 15.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 7 settembre 1998

Svolgimento

1. a. Poiché $E \setminus \{x\} \subseteq E$ valgono le disuguaglianze

$$\inf_E f \le \inf_{E\setminus\{x\}} f\,, \qquad \sup_{E\setminus\{y\}} f \le \sup_E f \qquad \forall x, y \in E\,.$$

Passando al sup rispetto a x e all'inf rispetto a y otteniamo

$$\inf_E f \le \sup_{x\in E}\Bigl(\inf_{E\setminus\{x\}} f\Bigr) =: \inf_E \text{uno} f\,, \qquad \sup_E \text{uno} f := \inf_{x\in E}\Bigl(\sup_{E\setminus\{x\}} f\Bigr) \le \sup_E f$$

Siano $x_1, x_2, x_3 \in E$ tre punti distinti. Eventualmente cambiando i nomi possiamo supporre che $f(x_1) \le f(x_2) \le f(x_3)$. Sia $x \in E$ qualsiasi. L'insieme $E \setminus \{x\}$ deve contenere almeno uno fra x_1 e x_2, per cui

$$\inf_{E\setminus\{x\}} f \le \max\bigl\{f(x_1), f(x_2)\bigr\} = f(x_2)\,.$$

Valendo questo per ogni $x \in E$ deduciamo che

$$\inf_E \text{uno} f := \sup_{x\in E}\Bigl(\inf_{E\setminus\{x\}} f\Bigr) \le f(x_2)\,.$$

Allo stesso modo l'insieme $E \setminus \{x\}$ deve contenere almeno uno fra x_2 e x_3, per cui

$$\sup_{E\setminus\{x\}} f \ge \min\bigl\{f(x_2), f(x_3)\bigr\} = f(x_2) \qquad \forall x \in E\,,$$

e di conseguenza

$$\sup_E \text{uno} f := \inf_{x\in E}\Bigl(\sup_{E\setminus\{x\}} f\Bigr) \ge f(x_2)\,.$$

Mettendo insieme tutto quanto otteniamo che

$$\inf_E f \le \inf_E \text{uno} f \le f(x_2) \le \sup_E \text{uno} f \le \sup_E f\,.$$

Cosa succede se $E = \{x_1, x_2\}$ e $f(x_1) < f(x_2)$?

b. Dimostriamo che dato $E \subseteq \mathbb{R}$

$$f(x) \le \sup_E \text{uno} f \qquad \text{per tutti gli } x \in E \text{ escluso al più uno.}$$

Supponiamo infatti che $x_0 \in E$ sia tale che

$$f(x_0) > \sup_E \text{uno} f = \inf_{y\in E}\Bigl(\sup_{E\setminus\{y\}} f\Bigr)\,,$$

e facciamo vedere che non ce ne sono altri. Per definizione di inf la disuguaglianza vuol dire che

$$\exists y_0 \in E \text{ tale che} \qquad f(x_0) > \sup_{E\setminus\{y_0\}} f\,.$$

Per definizione di sup questo si traduce a sua volta in

$$\exists y_0 \in E \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall z \in E \setminus \{y_0\} \qquad f(x_0) > \alpha \geq f(z)\,.$$

L'ultima disuguaglianza non può essere vera per $z = x_0$. Valendo però per ogni $z \in E \setminus \{y_0\}$, bisogna che $x_0 \notin E \setminus \{y_0\}$. Però $x_0 \in E$ per ipotesi. Pertanto y_0 deve coincidere con x_0:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall z \in E \setminus \{x_0\} \qquad f(x_0) > \alpha \geq f(z)\,.$$

Quindi per $y \in E$

$$\sup_{E\setminus\{y\}} f = \begin{cases} f(x_0) & \text{se } y \neq x_0, \\ \sup_{E\setminus\{x_0\}} f & \text{se } y = x_0, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \operatorname*{sup\,uno}_E f = \inf\Big\{ f(x_0), \sup_{E\setminus\{x_0\}} f \Big\} = \sup_{E\setminus\{x_0\}} f\,.$$

In definitiva la disuguaglianza $f(x) \leq \operatorname{sup\,uno}_E f$ è vera per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$. Analogamente si vede che

$$f(x) \geq \operatorname*{inf\,uno}_E f \qquad \text{per tutti gli } x \in E \text{ escluso al più uno.}$$

Poiché non è detto che il punto eventuale per il quale non vale una disuguaglianza sia lo stesso per il quale non vale l'altra concludiamo che

$$\operatorname*{inf\,uno}_E f \leq f(x) \leq \operatorname*{sup\,uno}_E f \qquad \text{per tutti gli } x \in E \text{ escluso al più due.}$$

Questa dimostrazione ha usato il risultato del punto **a**? Si può ottenere la **a** come corollario della **b**?

c. Fissiamo $m \in \mathbb{N}$ e $Q_0 \in \Omega_m$. Su Q_0 tutte le funzioni caratteristiche sono nulle eccetto la χ_{Q_0}:

$$\forall x \in Q_0 \qquad \begin{aligned} g_m(x) &= \sum_{Q\in\Omega_m} \chi_Q(x) \operatorname*{inf\,uno}_Q f = \chi_{Q_0}(x) \operatorname*{inf\,uno}_{Q_0} f = \operatorname*{inf\,uno}_{Q_0} f\,, \\ h_m(x) &= \sum_{Q\in\Omega_m} \chi_Q(x) \operatorname*{sup\,uno}_Q f = \chi_{Q_0}(x) \operatorname*{sup\,uno}_{Q_0} f = \operatorname*{sup\,uno}_{Q_0} f\,. \end{aligned}$$

Per quanto visto nel punto **b** dunque

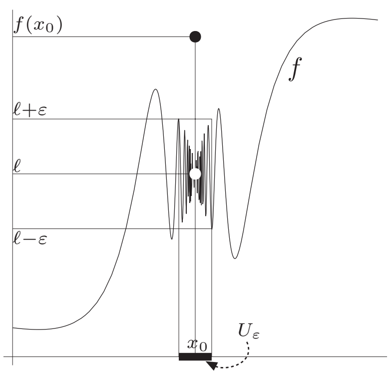
$$g_m(x) \leq f(x) \leq h_m(x) \qquad \text{per tutti gli } x \in Q_0 \text{ \emph{esclusi al più due.}}$$

D'altra parte quando Q_0 non interseca il supporto di f è chiaro che $g_m(x) = f(x) = h_m(x) \equiv 0$ per tutti gli $x \in Q_0$. Poiché soltanto un numero finito di Q_0 può intersecare il supporto di f, concludiamo che

$$g_m(x) \leq f(x) \leq h_m(x) \qquad \text{per tutti gli } x \in \mathbb{R}^n \text{ \emph{esclusi al più un numero finito.}}$$

d. Sia x_0 uno dei punti per i quali esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x) =: \ell$ e sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di limite esiste un intorno U_ε di x_0 tale che

$$x \in U_\varepsilon \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad \ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$



Sia ora U un qualsiasi intorno di x_0 contenuto in U_ε. In particolare

$$x \in U \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad \ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

da cui, essendo $U \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$,

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf_{U\setminus\{x_0\}} f \leq \sup_{U\setminus\{x_0\}} f \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Usando ora i punti **a** e **b**, dato che U ha almeno tre punti distinti (ne ha infiniti),

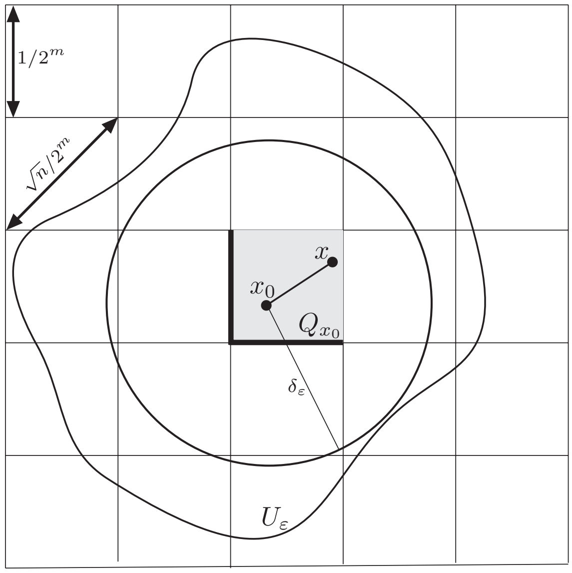
$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sup_{x\in U} \inf_{U\setminus\{x\}} f =: \operatorname*{inf\,uno}_U f \leq \operatorname*{sup\,uno}_U f := \inf_{x\in U} \sup_{U\setminus\{x\}} f \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Concludiamo per ogni U intorno di x_0 contenuto in U_ε (in questo senso "abbastanza piccolo") si ha che

$$0 \leq \operatorname*{sup\,uno}_U f - \operatorname*{inf\,uno}_U f \leq \varepsilon\,.$$

La formula rimane vera nelle nostre ipotesi se invece di $\operatorname{sup\,uno}, \operatorname{inf\,uno}$ scriviamo rispettivamente $\sup, \inf$?

e. Per ipotesi per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (rispetto alla misura di Lebesgue), esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Sia x_0 uno di tali punti e dimostriamo che $h_m(x_0) - g_m(x_0) \to 0$ per $m \to +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per il punto precedente esiste U_ε intorno di x_0 tale che per ogni altro intorno U di x_0 contenuto in U si ha che $0 \le \sup \mathrm{uno}_U f - \inf \mathrm{uno}_U f \le \varepsilon$. Sia $\delta_\varepsilon > 0$ tale che la palla euclidea $B(x_0, \delta_\varepsilon[$ di centro x_0 e raggio δ sia contenuta in U_ε. Sia Q_{x_0} il cubo binario di Ω_m a cui appartiene x_0 (Q_{x_0} esiste unico perché i cubi di Ω_m sono disgiunti e ricoprono $\mathbb{R}^n$). Q_{x_0} ha lato $1/2^m$, e quindi diametro $\sqrt{n}/2^m$. Se tale diametro è minore di δ_ε, cioè se $m > \log_2(\sqrt{n}/\delta_\varepsilon) =: M_\varepsilon$, allora $Q_{x_0} \subset B(x_0, \delta_\varepsilon[$. Infatti



$$\begin{aligned} x \in Q_{x_0} \quad &\Rightarrow \quad \|x - x_0\| \le \operatorname{diam} Q_{x_0} = \sqrt{n}/2^m < \delta_\varepsilon \\ &\Rightarrow \quad x \in B(x_0, \delta_\varepsilon[\,. \end{aligned}$$

Allora per il punto **d**

$$\begin{aligned} \forall m > M_\varepsilon \qquad 0 \le h_m(x_0) - g_m(x_0) &= \sum_{Q \in \Omega_m} \Big(\sup_Q \mathrm{uno}\, f - \inf_Q \mathrm{uno}\, f\Big)\chi_Q(x_0) = \\ &= \sup_{Q_{x_0}} \mathrm{uno}\, f - \inf_{Q_{x_0}} \mathrm{uno}\, f < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $m > M_\varepsilon$ $0 \le h_m(x_0) - g_m(x_0) \le \varepsilon$, cioè $\lim_{m\to+\infty}(h_m(x_0) - g_m(x_0)) = 0$. Ricordiamo che questo vale per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

f. Ricordiamo che una funzione $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta "a gradino" se è combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di scatole limitate (le "scatole" sono prodotti cartesiani del tipo $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ con gli $I_k \subset \mathbb{R}$ intervalli). Si ritiene noto che la somma di un numero finito di funzioni a gradino è ancora una funzione a gradino. Una $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta integrabile secondo Riemann se

$$\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^n} g\, d\lambda_n \;\Big|\; g \text{ a gradino}, g \le f\Big\} = \inf\Big\{\int_{\mathbb{R}^n} h\, d\lambda_n \;\Big|\; h \text{ a gradino}, h \ge f\Big\},$$

dove l'integrale è rispetto alla misura λ_n di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.
Consideriamo le nostre funzioni g_n, h_n. Ciascuna di queste è a gradino, perché per tutti i cubi $Q \in \Omega_m$ esclusi al più un numero finito la f è identicamente nulla su Q e quindi i coefficienti $\inf \mathrm{uno}_Q f, \sup \mathrm{uno}_Q f$ sono nulli:

$$0 = \inf_Q f \le \inf_Q \mathrm{uno}\, f \le \sup_Q \mathrm{uno}\, f \le \sup_Q f = 0\,.$$

Purtroppo non è detto che $g_m \le f \le h_m$ su tutto $\mathbb{R}^n$. Però esiste un sottinsieme finito $A_m \subset \mathbb{R}^n$ tale che

$$g_m(x) \le f(x) \le h_m(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A_m\,.$$

Correggiamo la situazione ridefinendo g_m, h_m come f sull'insieme A_m:

$$\tilde{g}_m(x) := g_m(x) + \sum_{y \in A_m} \big(f(y) - g_m(y)\big)\chi_{\{y\}}(x) = \begin{cases} g_m(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus A_m, \\ f(x) & \text{se } x \in A_m. \end{cases}$$

$$\tilde{h}_m(x) := h_m(x) + \sum_{y \in A_m} \big(f(y) - h_m(y)\big)\chi_{\{y\}}(x) = \begin{cases} h_m(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus A_m, \\ f(x) & \text{se } x \in A_m. \end{cases}$$

Queste nuove funzioni $\tilde{g}_m, \tilde{h}_m$ sono ancora a gradino perché somma finita di funzioni a gradino (ogni singoletto $\{y\}$ è una particolare scatola limitata) e verificano

$$\tilde{g}_m(x) \le f(x) \le \tilde{h}_m(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che il supporto di f sia contenuto in $E_0 := [-N, N]^n$. Allora vale

$$\chi_{E_0} \inf_{\mathbb{R}^n} f \le \tilde{g}_m \le f \le \tilde{h}_m \le \chi_{E_0} \sup_{\mathbb{R}^n} f , \qquad \text{per cui} \qquad |\tilde{h}_m - \tilde{g}_m| \le 2\chi_{E_0} \sup_{\mathbb{R}^n} |f| \in L^1(\mathbb{R}^n) .$$

Fuori da $\bigcup_m A_m$, che è un insieme al più numerabile, e quindi trascurabile secondo Lebesgue, le funzioni $\tilde{g}_m, \tilde{h}_m$ coincidono con g_m, h_m rispettivamente. Poiché $h_m - g_m \to 0$ quasi ovunque, anche $\tilde{h}_m - \tilde{g}_m \to 0$ quasi ovunque per $m \to +\infty$. Per il teorema della convergenza dominata

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}_m \, d\lambda_n - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}_m \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{h}_m - \tilde{g}_m) \, d\lambda_n \to 0 \qquad \text{per } m \to +\infty .$$

Con questo è dimostrato che f è integrabile secondo Riemann.

g. Essendo la f integrabile secondo Riemann, per il teorema di Vitali-Lebesgue la f è continua quasi ovunque. L'insieme dei punti x_0 di continuità è ovviamente contenuto nell'insieme dei punti in cui esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ma non necessariamente coincidono. Abbiamo in pratica dimostrato la seguente estensione del teorema di Vitali-Lebesgue:

Teorema. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è a supporto compatto e limitata allora si equivalgono le condizioni:*

1) f è integrabile secondo Riemann;
2) f è continua in quasi ogni punto di $\mathbb{R}^n$;
3) per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

h. Supponiamo che il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esista finito per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostriamo che $|f|$ è limitata ragionando prima per successioni: sia $x_n \in \mathbb{R}^n$ una successione tale che $|f(x_n)| \to \sup |f|$. Se f non è identicamente nulla (caso banale), x_n dovrà cadere definitivamente nel supporto di f, che è limitato. Pertanto la x_n è limitata, e possiamo estrarne una sottosuccessione x_{n_k} convergente a un certo $\bar{x}$. Se x_{n_k} assume infinite volte il valore $\bar{x}$ allora $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})$ non può essere che $|f(\bar{x})|$. Se x_{n_k} invece è definitivamente diverso da $\bar{x}$ allora per ipotesi $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})$ coincide col limite $\lim_{x\to\bar{x}} f(x)$, finito per ipotesi. In entrambi i casi il $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \sup |f|$ è finito.
Possiamo anche ragionare per intorni e ricoprimenti. Per ogni x_0 nel supporto di f esiste $\ell_{x_0} \in \mathbb{R}$ e (prendendo per esempio $\varepsilon = 1$) un intorno aperto U_{x_0} di x_0 tale che

$$x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad \bigl|f(x) - \ell_{x_0}\bigr| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \le |\ell_{x_0}| + 1 .$$

Quindi

$$x \in U_{x_0} \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \le \max\bigl\{|\ell_{x_0}| + 1, |f(x_0)|\bigr\} =: R_{x_0} < +\infty .$$

La famiglia degli intorni aperti U_{x_0} al variare di x_0 ricopre il supporto di f che è compatto. Quindi esistono $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} .$$

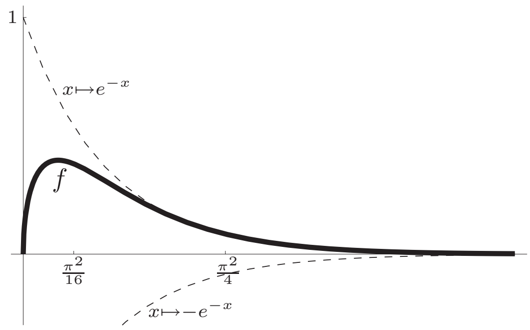
Pertanto

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |f| = \sup_{\operatorname{supp} f} |f| \le \max\bigl\{R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots, R_{x_k}\bigr\} < +\infty .$$

La f ha necessariamente massimo e minimo?

2. Il grafico della funzione integranda $f(x) := e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{x}$ è compreso fra i grafici di $x \mapsto \pm e^{-x}$. Quindi la funzione è in $L^1([0, +\infty[)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left|\operatorname{sen} \sqrt{x}\right| dx \le \\
&\le \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \\
&= 1 < +\infty\,.
\end{aligned}$$



L'integrale di f su $[0, +\infty[$ ha senso. Possiamo provare a calcolarlo sviluppando il seno in serie di Mclaurin. La serie del seno con argomento generico y è:

$$\operatorname{sen} y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall y \in \mathbb{R}\,.$$

Sostituiamo $y = \sqrt{x}$ e applichiamola al nostro integrale:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1/2}}{(2n+1)!} \right) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx\,,
\end{aligned}$$

dove

$$f_n(x) := e^{-x} (-1)^n \frac{x^{n+1/2}}{(2n+1)!}\,.$$

Due pratiche condizioni sufficienti perché si possa integrare per serie sono che o le funzioni da sommare siano tutte positive, oppure che la somma delle loro norme in L^1 sia finita. Il primo criterio nel nostro caso non si può usare. Proviamo col secondo:

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{L^1([0,+\infty[)} &= \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} \left| e^{-x} (-1)^n \frac{x^{n+1/2}}{(2n+1)!} \right| dx = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} x^{n+1/2} e^{-x}\, dx = \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} x^{(n+3/2)-1} e^{-x}\, dx\,.
\end{aligned}$$

L'ultima forma dell'integrale fa riconoscere un valore della funzione Γ:

$$\|f_n\|_{L^1([0,+\infty[)} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{(2n+1)!}\,.$$

Chiamiamo per brevità $a_n := \|f_n\|_{L^1}$. Grazie alla formula fondamentale della funzione Gamma $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e al valore notevole $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ possiamo ricavare una relazione ricorsiva per a_n:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2} + 1\right)}{(2n+3)!} = \frac{\left(n + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{(2n+1)!(2n+3)(2n+2)} = \frac{\frac{2n+3}{2}}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{(2n+1)!} = \\
&= \frac{1}{4(n+1)} a_n\,, \\
a_0 &= \frac{\Gamma(3/2)}{1} = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.
\end{aligned}$$

I primi termini della successione si possono scrivere così:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{4\cdot 1}a_0\,, \qquad a_2 = \frac{1}{4\cdot 2}a_1 = \frac{1}{4\cdot 2}\cdot\frac{1}{2\cdot 1}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{4^2\cdot(2\cdot 1)}a_0\,,\\
a_3 &= \frac{1}{4\cdot 3}a_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4^2\cdot(2\cdot 1)}a_0 = \frac{1}{4^3\cdot(3\cdot 2\cdot 1)}a_0\,,\\
a_4 &= \frac{1}{4\cdot 4}a_3 = \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{4^3\cdot(3\cdot 2\cdot 1)}a_0 = \frac{1}{4^4\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}a_0\,.
\end{aligned}
$$

Si indovina ora la formula generale

$$
a_n = \frac{1}{4^n\cdot n!}a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\cdot n!}\,,
$$

che verifica le relazioni ricorsive, come si vede subito. Se si ricorda la formula generale per $\Gamma(n+1/2)$:

$$
\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\cdot(n-1)!}\sqrt{\pi} \qquad \text{per } n\geq 1\,,
$$

la si può usare per ricavare a_n più speditamente:

$$
a_n = \frac{\Gamma(n+3/2)}{(2n+1)!)} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\cdot n!}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{(2n+1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\cdot n!}\,.
$$

Ora la serie delle a_n converge e addirittura la sua somma è una formula elementare, se ci si ricorda della serie di Taylor della funzione esponenziale

$$
\sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_{L^1} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\cdot n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1/4)^n}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{1/4} < +\infty\,.
$$

Possiamo ora integrare per serie nell'integrale originale:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x}(-1)^n\frac{x^{n+1/2}}{(2n+1)!}\,dx =\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\cdot n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1/4)^n}{n!} =\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4} \approx 0{,}69\,.
\end{aligned}
$$