Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 13 luglio 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, λ la solita misura boreliana normalizzata su $\mathbb{U}$ invariante per rotazioni, $u_n(z) := z^n$ la nota base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$. Sia inoltre $\Omega := \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$ il disco unitario aperto di $\mathbb{C}$.

a. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f(z) := |\Re z|$ rispetto alla base $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

b. Se f è la funzione del punto **a** allora la funzione

$$u(z) := \hat{f}(0) + \sum_{n>0} \Big(\hat{f}(n) z^n + \hat{f}(-n) \bar{z}^n \Big) ,$$

è definita puntualmente ed è continua su $\overline{\Omega}$, è armonica su Ω, e coincide con f su $\mathbb{U}$. Quanti termini della serie bisogna sommare per approssimare u uniformemente su $\overline{\Omega}$ con un errore minore di $\varepsilon > 0$? (Formula integrale di Poisson. . .).

c. Sia in generale $f \in L^2(\mathbb{U})$, a valori reali. Allora la formula del punto **b** definisce u puntualmente su Ω, dov'è armonica. Posto $f_t(z) := u(tz)$ per $0 \le t < 1$ e $z \in \mathbb{U}$, dimostrare che $f_t \in L^2(\mathbb{U})$ e che $\|f_t - f\|_{L^2(\mathbb{U})} \to 0$ per $t \to 1^-$. Inoltre se in un punto $z_0 \in \mathbb{U}$ la g è continua si ha che

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\Omega}} u(z) = f(z_0) .$$

3. Siano $1 < p, q < +\infty$ esponenti coniugati ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) e $f \in L^p([0, +\infty[)$. Dimostrare che la funzione $x \mapsto x^{-1/q} \int_0^x |f(t)|\, dt$ è infinitesima sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$.

Punti: 12+12+16, 12

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

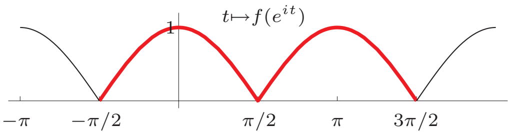
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

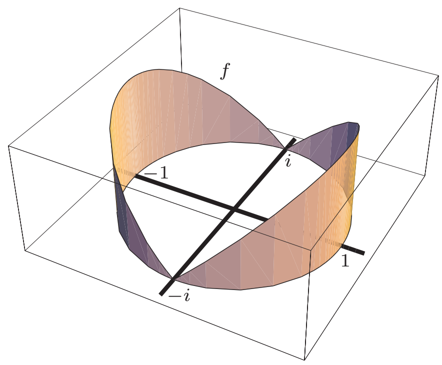
Prova Scritta del 13 luglio 1998

Svolgimento

1. a. Non guasta notare che la $f(z) := |\Re z|$ è continua, e quindi boreliana, su $\mathbb{U}$, che è compatto, per cui f è anche limitata. Pertanto $f \in L^2(\mathbb{U})$ e si può applicare la teoria delle serie di Fourier in $L^2(\mathbb{U})$. I coefficienti di Fourier di f rispetto alla base $u_n(z) := z^n$ sono dati dalle formule generali



$$\begin{aligned}
\hat f(n) &:= (f \mid u_n)_{L^2(\mathbb{U})} = \\
&= \int_{\mathbb{U}} f(z)\bar z^n \, d\lambda(z) = \int_0^{2\pi} |\Re e^{it}| \cdot e^{-int} \, \frac{dt}{2\pi} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos t| e^{-int} \, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-int} \cos t \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-int} \cos t \, dt \,.
\end{aligned}$$



Un modo abbastanza veloce di calcolare una primitiva elementare $G_n(t)$ della funzione $t \mapsto e^{-int}\cos t$ è di riportare il coseno all'esponenziale con la formula di Eulero $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$:

$$e^{-int}\cos t = e^{-int}\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{-i(n-1)t}}{2} + \frac{e^{-i(n+1)t}}{2} \,,$$

da cui ricaviamo subito, distinguendo i casi speciali $n = \pm 1$,

$$\begin{aligned}
G_1(t) &= \frac{t}{2} + \frac{e^{-2it}}{-4i} = \frac{t}{2} - \frac{e^{-2it}}{4i} \,, \qquad G_{-1}(t) = \frac{e^{2it}}{4i} + \frac{t}{2} \,, \\
G_n(t) &= \frac{e^{-i(n-1)t}}{-2i(n-1)} + \frac{e^{-i(n+1)t}}{-2i(n+1)} = -\frac{e^{-int}}{2i}\left(\frac{e^{-it}}{n+1} + \frac{e^{it}}{n-1}\right).
\end{aligned}$$

In termini di G_n i coefficienti di Fourier sono

$$\hat f(n) = \frac{G_n(\pi/2) - G_n(-\pi/2) - G_n(3\pi/2) + G_n(\pi/2)}{2\pi} = \frac{2G_n(\pi/2) - G_n(-\pi/2) - G_n(3\pi/2)}{2\pi} \,.$$

I vari termini nel caso $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ sono

$$\begin{aligned}
G_n(\pi/2) &= \frac{e^{-in\pi/2}}{2i}\left(\frac{e^{-i\pi/2}}{n+1} + \frac{e^{i\pi/2}}{n-1}\right) = \frac{(e^{-i\pi/2})^n}{2i}\left(\frac{-i}{n+1} + \frac{i}{n-1}\right) = \frac{(-i)^n}{2i} \cdot \frac{2i}{n^2-1} = \frac{(-i)^n}{n^2-1} \,, \\
G_n(-\pi/2) &= \frac{e^{in\pi/2}}{2i}\left(\frac{e^{i\pi/2}}{n+1} + \frac{e^{-i\pi/2}}{n-1}\right) = \frac{(e^{i\pi/2})^n}{2i}\left(\frac{i}{n+1} + \frac{-i}{n-1}\right) = \frac{i^n}{2i} \cdot \frac{-2i}{n^2-1} = -\frac{i^n}{n^2-1} \,, \\
G_n(3\pi/2) &= \frac{e^{-3in\pi/2}}{2i}\left(\frac{e^{-3i\pi/2}}{n+1} + \frac{e^{3i\pi/2}}{n-1}\right) = \frac{(e^{-3i\pi/2})^n}{2i}\left(\frac{i}{n+1} + \frac{-i}{n-1}\right) = \frac{i^n}{2i} \cdot \frac{-2ni}{n^2-1} = -\frac{i^n}{n^2-1} = \\
&= G_n(-\pi/2) \,,
\end{aligned}$$

per cui

$$\hat f(n) = \frac{1}{2\pi}\Big(2\frac{(-i)^n}{n^2-1} + \frac{i^n}{n^2-1} + \frac{i^n}{n^2-1}\Big) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2(-i)^n+2i^n}{n^2-1} = \frac{2\Re i^n}{\pi(n^2-1)} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq \pm 1 \text{ è dispari,} \\ \dfrac{2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2-1)} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Nel caso $n = 1$

$$\begin{aligned}\hat f(1) &= \frac{2G_1(\pi/2) - G_1(-\pi/2) - G_1(3\pi/2)}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\bigg(2\Big(\frac{\pi/2}{2} - \frac{e^{-2i\pi/2}}{-4i}\Big) - \Big(\frac{-\pi/2}{2} - \frac{e^{-2i(-\pi/2)}}{-4i}\Big) - \Big(\frac{3\pi/2}{2} - \frac{e^{-2i(3\pi/2)}}{-4i}\Big)\bigg) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\pi}{2} + 2\frac{-1}{4i} + \frac{\pi}{4} - \frac{-1}{4i} - \frac{3}{4}\pi - \frac{-1}{4i}\pi\Big) = 0\,,\end{aligned}$$

mentre per $n = -1$ non c'è bisogno di rifare i conti perché in generale quando f è a valori reali $\hat f(-n)$ e $\hat f(n)$ sono coniugati uno dell'altro. Comunque, per chi non si ricordasse:

$$\begin{aligned}\hat f(-n) &= (f \mid u_{-n})_{L^2(\mathbb{U})} = \int_{\mathbb{U}} f(z)\bar z^{-n}\,d\lambda(z) = \int_{\mathbb{U}} f(z) z^n\,d\lambda(z) = \int_{\mathbb{U}} \overline{f(z)\bar z^n}\,d\lambda(z) = \\ &= \overline{\int_{\mathbb{U}} f(z)\bar z^n\,d\lambda(z)} = \overline{(f \mid u_n)_{L^2(\mathbb{U})}} = \overline{\hat f(n)}\,.\end{aligned}$$

Oltre a essere a valori reali, la funzione f è simmetrica rispetto all'origine $f(-z) = f(z)$, cioè è *pari* (attenzione: si dà il caso che anche la funzione di variabile reale $t \mapsto f(e^{it})$ sia pari, ma questa è un'altra faccenda e la vedremo dopo). La simmetria rispetto all'origine annulla d'un colpo tutti i coefficienti di Fourier di ordine pari. Infatti se n è un intero pari allora la funzione $x \mapsto f(z)z^{-n}$ è dispari, e il suo integrale su $\mathbb{U}$ è necessariamente nullo per simmetria (la misura λ è invariante anche per simmetrie):

$$\begin{aligned}\hat f(n) &= \int_{\mathbb{U}} f(z)\bar z^n\,d\lambda(z) = \int_{\{z\in\mathbb{U}\,:\,\Re z\geq 0\}} f(z)\bar z^n\,d\lambda(z) + \int_{\{z\in\mathbb{U}\,:\,\Re z< 0\}} f(z)\bar z^n\,d\lambda(z) = \\ &= \int_{\{z\in\mathbb{U}\,:\,\Re z\geq 0\}} f(z)\bar z^n\,d\lambda(z) + \int_{\{w\in\mathbb{U}\,:\,\Re w> 0\}} f(-w)\overline{(-w)^n}\,d\lambda(w) = \\ &= \int_{\{z\in\mathbb{U}\,:\,\Re z\geq 0\}} f(z)\bar z^n\,d\lambda(z) - \int_{\{w\in\mathbb{U}\,:\,\Re w> 0\}} f(w)\bar w^n\,d\lambda(w) = 0 \qquad \text{se } n \text{ è dispari.}\end{aligned}$$

Un'altra simmetria notevole (e indipendente dalla parità) è quella rispetto all'asse reale, cioè il fatto che $f(\bar z) = f(z)$ (che si traduce nella parità di $t \mapsto f(e^{it})$). La conseguenza sui coefficienti di Fourier è che

$$\hat f(-n) = \int_{\mathbb{U}} f(z)\bar z^{-n}\,d\lambda(z) = \int_{\mathbb{U}} f(\bar z) z^n\,d\lambda(z) = \int_{\mathbb{U}} f(w)\bar w^n\,d\lambda(w) = \hat f(n)$$

usando prima le identità $f(\bar z) = f(z)$ e $\bar z^{-n} = z^n$, e poi il cambio di variabile $w = \bar z$. Unito al fatto che già sappiamo che $\hat f(n)$ e $\hat f(-n)$ sono coniugati fra loro, ci consoliamo nella conferma che i coefficienti dovevano essere *reali*. La f è simmetrica anche rispetto all'asse immaginario; possiamo trarne qualcosa di nuovo?
Possiamo ora scrivere esplicitamente la serie di Fourier di f, non indicando la variabile $z \in \mathbb{U}$ perché a priori l'uguaglianza non è puntuale, ma solo nel senso delle somme infinite di $L^2(\mathbb{U})$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f(n)u_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(2k)u_{2k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -\frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}u_{2k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}u_{2k}\,.$$

Possiamo anche tradurre la somma in termini delle funzioni reali $c_n(z) := \Re u_n$, $s_n(z) := \Im u_n$ (che lette sulla retta reale danno le funzioni trigonometriche $c_n(e^{it}) = \cos nt$, $s_n(e^{it}) = \operatorname{sen} nt$):

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} u_{2k} = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}(u_{2k}+u_{-2k}) = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} 2\Re u_{2k} =$$
$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} c_{2k}\,.$$

Che le s_n non compaiano segue da $\hat{f}(-n) = \hat{f}(n)$. Facciamo alcuni conti per curiosità. L'uguaglianza di Bessel ci dice che

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{U})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\hat{f}(n)\big|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4}{\pi^2(4k^2-1)^2}\,.$$

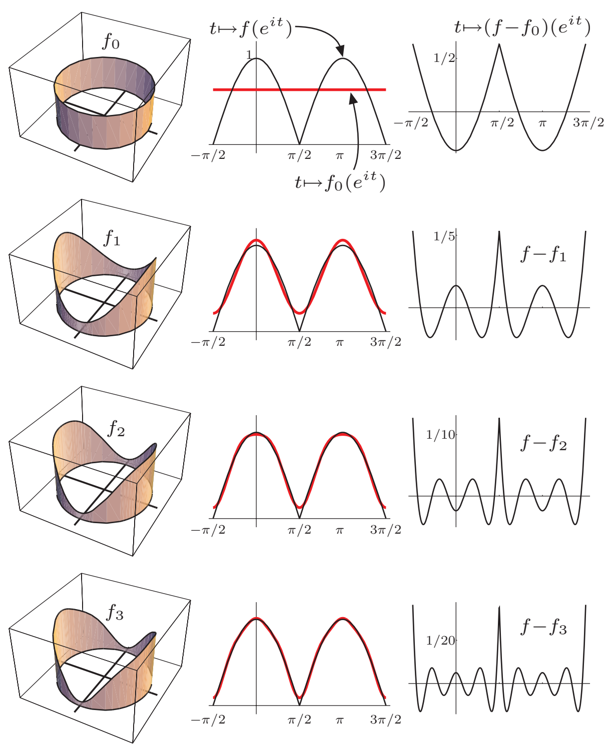
Calcoliamo la norma di f per altra via:

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{U})} = \int_{\mathbb{U}} |f|^2\,d\lambda = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}\,.$$

Uguagliando i valori trovati viene

$$\frac{1}{2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4}{\pi^2(4k^2-1)^2}\,, \qquad \text{o, più suggestivamente,} \qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(4k^2-1)^2}\,.$$

Altra cosa che si può notare è che la successione $n \mapsto \hat{f}(n)$ è in $\ell^1(\mathbb{Z})$, per cui la serie di Fourier converge totalmente, e quindi puntualmente, a una funzione continua, che coincide λ-quasi ovunque con f. Ma se due funzioni continue su $\mathbb{U}$ coincidono quasi ovunque allora coincidono ovunque (il complemento di un insieme trascurabile per λ è denso in $\mathbb{U}$). Pertanto la serie converge a f su tutto $\mathbb{U}$:



$$f(z) = |\Re z| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} z^{2k} \qquad \forall z \in \mathbb{U}\,.$$

Letta sulla retta reale:

$$f(e^{it}) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

La figura qui accanto mostra i grafici delle prime somme parziali:

$$f_K(z) := \sum_{k=-K}^{K} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} z^{2k}\,,$$

come funzioni su $\mathbb{U}$ e sulla retta reale (prime due colonne), nonché l'errore $f - f_K$ (terza colonna). Ponendo $z = 1$ o $t = 0$ si ha

$$1 = |\Re 1| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\pi}{2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\,.$$

Ponendo $z = i$ o $t = \pi/2$

$$0 = |\Re i| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} i^{2k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} (-1)^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^{2k+1}}{\pi(4k^2-1)} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2}{\pi(4k^2-1)} =$$
$$= -\frac{2}{\pi(0-1)} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4k^2-1)},$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Problema. Dimostrare quest'ultima uguaglianza per via elementare.

b. Dato che f è continua su $\mathbb{U}$, la formula integrale di Poisson ci garantisce che la seguente funzione v è armonica su Ω, prolungabile per continuità ad $\mathbb{U}$, e con prolungamento coincidente con f su $\mathbb{U}$:

$$v(z) := \int_{\mathbb{U}} f(w) P(z,w)\, d\lambda(w) \qquad \text{per } |z| < 1,$$

dove

$$P(z,w) := 1 + \sum_{n>0} \bar{w}^n z^n + \sum_{n<0} \bar{w}^n \bar{z}^n = \Re\frac{w+z}{w-z} = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} \qquad \text{per } z \in \Omega,\ w \in \mathbb{U}.$$

Possiamo scambiare l'integrale con la serie nella formula per $v(z)$? Cioè

$$\int_{\mathbb{U}} f(w)\Big(1 + \sum_{n>0} \bar{w}^n z^n + \sum_{n<0} \bar{w}^n \bar{z}^n\Big)\, d\lambda(w) \overset{?}{=} \int_{\mathbb{U}} f(w)\, d\lambda(w) + \sum_{n>0} \int_{\mathbb{U}} f(w)\bar{w}^n z^n\, d\lambda(w) +$$
$$+ \sum_{n<0} \int_{\mathbb{U}} f(w)\bar{w}^n \bar{z}^n\, d\lambda(w).$$

Vediamo se la serie delle norme in $L^1(\mathbb{U})$ converge (che è condizione sufficiente per la convergenza della serie in $L^1(\mathbb{U})$, e quindi per lo scambio fra integrale e somma):

$$\int_{\mathbb{U}} |f(w)|\, d\lambda(w) + \sum_{n>0} \int_{\mathbb{U}} \big|f(w)\bar{w}^n z^n\big|\, d\lambda(w) + \sum_{n<0} \int_{\mathbb{U}} \big|f(w)\bar{w}^n \bar{z}^n\big|\, d\lambda(w) =$$
$$= \|f\|_{L^1(\mathbb{U})} + \sum_{n>0} \|f\|_{L^1(\mathbb{U})} |z|^n + \sum_{n<0} \|f\|_{L^1(\mathbb{U})} |\bar{z}|^n = \|f\|_{L^1(\mathbb{U})} \Big(1 + 2\frac{|z|}{1-|z|}\Big) \le$$
$$\le \|f\|_{L^2(\mathbb{U})} \frac{1+|z|}{1-|z|} < +\infty$$

($\|f\|_{L^1(\mathbb{U})} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{U})}$ per la disuguaglianza di Hölder, e $|w| = 1$). L'ordine si può dunque scambiare e risulta

$$v(z) = \int_{\mathbb{U}} f(w)\, d\lambda(w) + \sum_{n>0} \int_{\mathbb{U}} f(w)\bar{w}^n z^n\, d\lambda(w) + \sum_{n<0} \int_{\mathbb{U}} f(w)\bar{w}^n \bar{z}^n\, d\lambda(w) =$$
$$= \hat{f}(0) + \sum_{n>0} \hat{f}(n) z^n + \sum_{n<0} \hat{f}(n)\bar{z}^n = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\hat{f}(n) z^n + \hat{f}(-n)\bar{z}^n\big).$$

Questa è esattamente la formula che definisce $u(z)$. Sostituendo i valori trovati per i coefficienti di Fourier di f,

$$u(z) = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(n)(z^n + \bar{z}^n) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cdot 2\Re z^{2k}.$$

Questa serie converge totalmente per z in tutto $\overline{\Omega}$. Se arrestiamo la somma all'indice $k = K$ otteniamo la funzione $u_K\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ che è armonica su tutto $\mathbb{C}$ e polinomiale se vista su $\mathbb{R}^2$:

$$u_K(z) := \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{K} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cdot 2\Re z^{2k}\,.$$

L'errore che si commette prendendo u_K al posto di u si stima uniformemente su $\overline{\Omega}$ come

$$\bigl|u(z) - u_K(z)\bigr| \le \sum_{k=K+1}^{+\infty} \left|\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cdot 2\Re z^{2k}\right| = \frac{4}{\pi} \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}\,.$$

Quest'ultima è una serie telescopica, in quanto

$$a_n := \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Bigr) = b_{n+1} - b_n\,, \qquad \text{dove } b_n := -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k-1}\,.$$

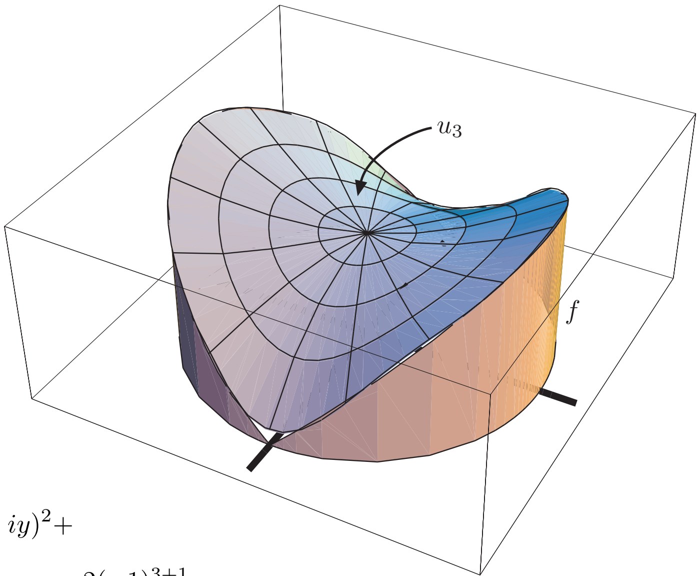
Quindi

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=K+1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=K+1}^{+\infty} (b_{n+1} - b_n) = b_\infty - b_{K+1} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2K+1}\,.$$

La stima dell'errore è

$$\bigl|u(z) - u_K(z)\bigr| \le \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2K+1} = \frac{2}{\pi(2K+1)}\,.$$

Notare che questa stima uniforme non si può migliorare, in quanto la disuguaglianza diventa uguaglianza per $z = \pm i$. Non sembra un caso che $\pm i$ siano precisamente i *punti angolosi* del grafico di f, dove del resto anche lo scostamento delle somme parziali f_K da f era pessimo. Se vogliamo un errore non superiore a $\varepsilon > 0$ uniformemente su $\overline{\Omega}$ occorre e basta che prendiamo $K \ge \frac{1}{\varepsilon\pi} - \frac{1}{2}$. Per esempio se $\varepsilon = 1/10$ ci vuole $K \ge 3$. Il grafico della corrispondente funzione u_3 è ritratto qui accanto insieme a quello della f. Si nota come l'accordo al bordo è buono, eccetto nelle vicinanze dei punti angolosi $\pm i$. La formula esplicita di u_3 è



$$\begin{aligned} u_3(x+iy) &= \frac{2}{\pi} + \frac{2(-1)^{1+1}}{\pi(4\cdot 1^1 - 1)} \cdot 2\Re(x+iy)^2 + \\ &\quad + \frac{2(-1)^{2+1}}{\pi(4\cdot 2^2-1)} \cdot 2\Re(x+iy)^4 + \frac{2(-1)^{3+1}}{\pi(4\cdot 3^2-1)} \cdot 2\Re(x+iy)^6 = \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}(x^2-y^2) - \frac{4}{15\pi}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{4}{35\pi}(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6)\,. \end{aligned}$$

c. Se $f \in L^2(\mathbb{U})$ e $0 \le t < 1$, la formula

$$u(z) := \hat{f}(0) + \sum_{n>0} \Bigl(\hat{f}(n) z^n + \hat{f}(-n)\bar{z}^n\Bigr)$$

definisce la funzione u su Ω in quanto la successione $n \mapsto \hat{f}(n)$, essendo in $\ell^2(\mathbb{Z})$, è in particolare limitata:

$$\sum_{n>0} \Bigl|\hat{f}(n)z^n + \hat{f}(-n)\bar{z}^n\Bigr| \le \sum_{n>0} 2|z|^n \max_{n\in\mathbb{Z}} \bigl|\hat{f}(n)\bigr| = \frac{2|z|}{1-|z|} \max_{n\in\mathbb{Z}} \bigl|\hat{f}(n)\bigr|\,.$$

Ora la funzione $z \mapsto \sum_{n>0} \hat{f}(n) z^n$ è una serie di potenze complessa di centro l'origine e raggio di convergenza ≥ 1, per cui è derivabile in senso complesso infinite volte su Ω, e la sua parte reale è una funzione armonica, sempre su Ω. Quando f è a valori reali, $\hat{f}(-n)$ e $\hat{f}(n)$ sono fra loro coniugati, per cui la funzione u risulta armonica su Ω perché parte reale di una funzione derivabile in senso complesso:

$$u(z) = \Re\big(\hat{f}(0) + \sum_{n>0} f(n) z^n\big) .$$

Per studiare il comportamento di u vicino al bordo di Ω consideriamo i valori di u su cerchi concentrici di centro l'origine, riportati a funzioni su $\mathbb{U}$ con omotetie per poterli confrontare fra loro, cioè definiamo

$$f_t(z) = u(tz) = \hat{f}(0) + \sum_{n>0} \Big(\hat{f}(n)(tz)^n + \hat{f}(-n)(t\bar{z})^n\Big) .$$

Queste f_t sono ben definite su $\mathbb{U}$ perché $z \in \mathbb{U} \Rightarrow tz \in \Omega$, ed $f_t \in L^2(\mathbb{U})$ in quanto sono continue (anzi, sono di classe C^∞). Ci interessa la convergenza di f_t verso f per $t \to 1^-$. Risulta

$$\begin{aligned} f_t(z) = u(tz) &= \hat{f}(0) + \sum_{n>0} \Big(\hat{f}(n)(tz)^n + \hat{f}(-n)(t\bar{z})^n\Big) = \\ &= \hat{f}(0) + \sum_{n>0} \Big(\hat{f}(n) t^n z^n + \hat{f}(-n) t^n z^{-n}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^{|n|} \hat{f}(n) z^n \qquad \forall z \in \mathbb{U} . \end{aligned}$$

La convergenza di quest'ultima serie oltre che essere puntuale è anche uniforme (e quindi in $L^2(\mathbb{U})$) perché

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|t^{|n|} \hat{f}(n) z^n\big| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^{|n|} \big|\hat{f}(n)\big| \leq \frac{1+t}{1-t} \max_{n\in\mathbb{Z}} \big|\hat{f}(n)\big| .$$

I coefficienti di Fourier di f_t si ricavano ora semplicemente uguagliando i coefficienti nelle due serie

$$f_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f_t}(n) u_n \qquad \text{e} \qquad f_t(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^{|n|} \hat{f}(n) z^n , \qquad \text{dove } u_n(z) := z^n ,$$

cioè

$$\widehat{f_t}(n) = t^{|n|} \hat{f}(n) .$$

La distanza in $L^2(\mathbb{U})$ fra f e f_t si ricava facilmente dall'identità di Bessel:

$$\|f - f_t\|^2_{L^2(\mathbb{U})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{f - f_t}(n)\big|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\hat{f}(n) - \widehat{f_t}(n)\big|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 - t^{|n|}) \big|\hat{f}(n)\big|^2 .$$

Per dimostrare che tale distanza tende a 0 per $t \to 1^-$, usiamo il teorema della convergenza dominata per le serie:

$$\lim_{t\to 0^-} (1 - t^{|n|}) \big|\hat{f}(n)\big|^2 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} , \qquad \text{e} \qquad \sup_{t\in[0,1[} \Big|(1 - t^{|n|}) \big|\hat{f}(n)\big|^2\Big| = \big|\hat{f}(n)\big|^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z} ;$$

dato che la successione dominante $n \mapsto |\hat{f}(n)|^2$ è in $\ell^1(\mathbb{Z})$ (e non dipende da t), possiamo scambiare il limite per $t \to 1^-$ con la somma e concludere che

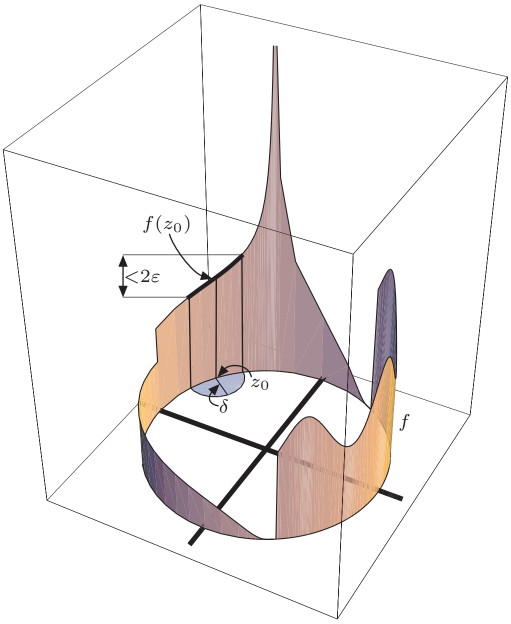
$$\|f - f_t\|^2_{L^2(\mathbb{U})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 - t^{|n|}) \big|\hat{f}(n)\big|^2 \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 - 1^{|n|}) \big|\hat{f}(n)\big|^2 = 0 \qquad \text{per } t \to 1^- .$$

Per studiare il comportamento *puntuale* di $u(z)$ quando z si avvicina al bordo di Ω (invece che il comportamento *in media quadratica* come visto finora) conviene trascrivere $u(z)$ nella forma integrale di Poisson, il che è lecito per gli stessi calcoli del punto **b**:

$$u(z) := \int_{\mathbb{U}} f(w) P(z, w) \, d\lambda(w) \qquad \text{per } |z| < 1 ,$$

dove ancora

$$P(z,w) := 1 + \sum_{n>0} \bar{w}^n z^n + \sum_{n<0} \bar{w}^n \bar{z}^n = \Re \frac{w+z}{w-z} = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} \qquad \text{per } z \in \Omega,\ w \in \mathbb{U}.$$



Sia ora $z_0 \in \mathbb{U}$ tale che f sia continua in z_0. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall w \in \mathbb{U} \quad |w - z_0| \le \delta \Rightarrow \big|f(w) - f(z_0)\big| \le \varepsilon\,.$$

Aggiungendo e togliendo $f(z_0)$ nell'integrale e usando il fatto che $\int_{\mathbb{U}} P(z,w)\,d\lambda(w) = 1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{\mathbb{U}} f(w) P(z,w)\,d\lambda(w) = \\ &= \int_{\mathbb{U}} f(z_0) P(z,w)\,d\lambda(w) + \\ &\quad + \int_{\mathbb{U}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\,d\lambda(w) = \\ &= f(z_0) + \int_{\mathbb{U}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\,d\lambda(w)\,. \end{aligned}$$

Nostro compito sarà di dimostrare che l'ultimo integrale tende a 0 per $z \to z_0$, $z \in \Omega$. Spezziamo l'integrale fra i w vicini a z_0 e quelli lontani:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{U}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\,d\lambda(w) &= \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0| \le \delta\}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\,d\lambda(w) + \\ &\quad + \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0| > \delta\}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\,d\lambda(w)\,. \end{aligned}$$

L'integrale su $\{w \in \mathbb{U}\ :\ |w - z_0| \le \delta\}$ si stima così, ricordando che $P(z,w)$ è reale ≥ 0:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0| \le \delta\}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\,d\lambda(w) \right| &\le \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0| \le \delta\}} \Big| \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w) \Big|\,d\lambda(w) \le \\ &\le \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0| \le \delta\}} \varepsilon \big|P(z,w)\big|\,d\lambda(w) \le \varepsilon \int_{\mathbb{U}} P(z,w)\,d\lambda(w) = \varepsilon \qquad \forall z \in \Omega\,. \end{aligned}$$

L'integrale rimanente è infinitesimo per $z \to z_0$ per la convergenza puntuale:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}} \big(f(w) - f(z_0)\big) \frac{\overbrace{1 - |z|^2}^{\to 0}}{\underbrace{|w-z|^2}_{\ge \delta^2}} = 0 \qquad \forall w \in \mathbb{U}\,,$$

dominata:

$$\Big| \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w) \Big| \le \big(|f(w)| + |f(z_0)|\big) \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2} \le \big(|f(w)| + |f(z_0)|\big) \frac{1}{\delta^2}\,;$$

la funzione di w all'ultimo membro non dipende da z ed è in $L^1(\mathbb{U})$ perché le costanti sono in $L^1(\mathbb{U})$ e $f \in L^2(\mathbb{U}) \subset L^1(\mathbb{U})$. Dunque

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}} \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0| > \delta\}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\,d\lambda(w) = \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0| > \delta\}} 0\,d\lambda(w) = 0\,.$$

Pertanto esiste $\delta_2 > 0$ tale che

$$\forall z \in \Omega \qquad |z - z_0| \leq \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left| \int_{\{w \in \mathbb{U}\,:\,|w-z_0|>\delta\}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\, d\lambda(w) \right| \leq \varepsilon\,.$$

Di seguito

$$\forall z \in \Omega \quad |z - z_0| \leq \delta_2 \Rightarrow \left| \int_{\mathbb{U}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\, d\lambda(w) \right| \leq \varepsilon + \varepsilon\,,$$

formula che permette di concludere che

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}} u(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}} \left(f(z_0) + \int_{\mathbb{U}} \big(f(w) - f(z_0)\big) P(z,w)\, d\lambda(w) \right) = f(z_0)\,.$$

2. Per la disuguaglianza di Hölder possiamo scrivere

$$0 \leq \int_0^x \big|f(t)\big|\, dt = \int_0^x \big|f(t)\big| \cdot 1\, dt \leq \left(\int_0^x \big|f(t)\big|^p\, dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^x 1^q\, dt \right)^{1/q} = x^{1/q} \left(\int_0^x \big|f(t)\big|^p\, dt \right)^{1/p}.$$

Pertanto

$$0 \leq x^{-1/q} \int_0^x \big|f(t)\big|\, dt \leq \left(\int_0^x \big|f(t)\big|^p\, dt \right)^{1/p} = \left(\int_{[0,+\infty[} \big|f(t)\big|^p \chi_{[0,x]}(t)\, dt \right)^{1/p},$$

L'integrale all'ultimo membro tende a 0 per $x \to 0^+$ per la convergenza dominata:

$$\lim_{x \to 0^+} \big|f(t)\big|^p \chi_{[0,x]}(t) = \begin{cases} |f(0)|^p & \text{se } t = 0, \\ 0 & \text{se } t > 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \Big| \big|f(t)\big|^p \chi_{[0,x]}(t) \Big| \leq \big|f(t)\big|^p,$$

e la funzione $t \to |f(t)|^p$ non dipende da x ed è in $L^1([0,+\infty[)$ perché $f \in L^p([0,+\infty[)$. Deduciamo che

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-1/q} \int_0^x \big|f(t)\big|\, dt = 0\,.$$

Per calcolare il limite per $x \to +\infty$ cominciamo a notare che applicando lo stesso ragionamento di convergenza dominata si trova che :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \big|f(t)\big|^p\, dt = 0\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $x_0 \geq 0$ tale che

$$\int_{x_0}^{+\infty} \big|f(t)\big|^p\, dt \leq \varepsilon\,.$$

Allora se $x \geq x_0$ possiamo spezzare l'intervallo $[0,x]$ nei due sottointervalli $[0,x_0]$ e $]x_0,x]$ e ancora per la disuguaglianza di Hölder abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_0^x \big|f(t)\big|\, dt &= \int_0^{x_0} \big|f(t)\big|\, dt + \int_{x_0}^x \big|f(t)\big|\, dt \leq \int_0^{x_0} \big|f(t)\big|\, dt + (x - x_0)^{1/q} \left(\int_{x_0}^x \big|f(t)\big|^p\, dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \int_0^{x_0} \big|f(t)\big|\, dt + (x - x_0)^{1/q} \varepsilon^{1/p}\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \max\lim_{x \to +\infty} x^{-1/q} \int_0^x \big|f(t)\big|\, dt &\leq \max\lim_{x \to +\infty} x^{-1/q} \left(\int_0^{x_0} \big|f(t)\big|\, dt + (x - x_0)^{1/q} \varepsilon^{1/p} \right) \leq \\ &\leq \max\lim_{x \to +\infty} x^{-1/q} \underbrace{\int_0^{x_0} \big|f(t)\big|\, dt}_{\text{costante finita}} + \max\lim_{x \to +\infty} x^{-1/q} (x - x_0)^{1/q} \varepsilon^{1/p} = \\ &= 0 + \max\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - x_0}{x} \right)^{1/q} \varepsilon^{1/p} = \varepsilon^{1/p}\,. \end{aligned}$$

Valendo questo per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo dedurre che

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-1/q} \int_0^x \big|f(t)\big|\, dt = 0\,.$$