Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 15 giugno 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Poniamo $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$.Si rammenta che dato uno spazio di misura positiva $(Z, \mathcal{M}, \nu)$ e una funzione $f: Z \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{M}$-misurabile si definisce l'estremo superiore essenziale di f rispetto a ν come

$$\operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z,\ \nu} f(z) := \inf\bigl\{a \in \bar{\mathbb{R}} \ :\ f \le a \ \ \nu\text{-quasi ovunque}\bigr\}\,.$$

a. Siano X, Y due insiemi e $f: X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ una funzione. Dimostrare che allora $\sup_{X \times Y} f = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x,y) = \sup_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y)$.

b. Siano $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ due spazi misurabili e $f: X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile rispetto alla σ-algebra prodotto $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. Mostrare che non è detto che la funzione $x \mapsto \sup_{y \in Y} f(x,y)$ sia $\mathcal{S}$-misurabile. (Siano $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{S}$ i misurabili secondo Lebesgue in $[0,1]$, $\mathcal{T}$ le parti di $[0,1]$, V un insieme di $[0,1]$ non in $\mathcal{S}$, $E := \{(x,x) \ :\ x \in V\}$ e $f := \chi_E$).

c. Sia $(Z, \mathcal{M}, \nu)$ uno spazio di misura positiva e $f_n: Z \to \bar{\mathbb{R}}$ una successione di funzioni reali $\mathcal{M}$-misurabili. Sia $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Dimostrare che $\operatorname{sup\,ess}_{z \in Z,\ \nu} f(z) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{sup\,ess}_{z \in Z,\ \nu} s_n$.

d. Siano $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ due spazi di misura positiva σ-finita ed $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. Definiamo la "proiezione essenziale" di E su X come

$$\tilde{\pi}_1(E) := \Bigl\{x \in X \ :\ \lambda\bigl(\{y \in Y \ :\ (x,y) \in E\}\bigr) > 0\Bigr\}\,.$$

Dimostrare che $\tilde{\pi}_1(E)$ è ben definito, è in $\mathcal{S}$ e l'insieme $E \cap (\tilde{\pi}_1(E) \times Y)$ differisce da E per un insieme $\mu \otimes \lambda$-trascurabile.

e. Siano $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ due spazi di misura σ-finita e $f: X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile rispetto alla σ-algebra prodotto $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. Dimostrare che la funzione $g(x) := \operatorname{sup\,ess}_{y \in Y,\ \lambda} f(x,y)$ è $\mathcal{S}$-misurabile e che $\operatorname{sup\,ess}_{(x,y) \in X \times Y,\ \mu \otimes \lambda} f(x,y) = \operatorname{sup\,ess}_{x \in X,\ \mu} g(x)$.

2. Sia H uno spazio di Hilbert e $\{e_n \ :\ n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo in H. Dimostrare che esiste una e una sola $\Phi: H \times H \to H$ bilineare e continua tale che

$$\Phi(e_i, e_j) = \begin{cases} e_i & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \ne j. \end{cases}$$

Inoltre tale Φ è simmetrica e non è suriettiva.

Punti: 3+8+8+5+10, 12

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 15 giugno 1998

Svolgimento

1. a. Dimostriamo che entrambi i due numeri reali estesi

$$\alpha := \sup_{x\in X}\Big(\sup_{y\in Y} f(x,y)\Big) \quad \text{e} \quad \beta := \sup_{y\in Y}\Big(\sup_{x\in X} f(x,y)\Big)$$

coincidono con

$$\gamma := \sup\big\{f(x,y) \ : \ x\in X,\ y\in Y\big\}\,.$$

Sia infatti $a\in\bar{\mathbb{R}}$ con $a\geq\gamma$, cioè un maggiorante dell'insieme $\{f(x,y) \ : \ x\in X,\ y\in Y\}$. Allora

$$a\geq f(x,y) \quad \forall x\in X\ \forall y\in Y\,, \quad \text{cioè} \quad a\geq \sup_{y\in Y} f(x,y) \quad \forall x\in X\,, \quad \text{per cui} \quad a\geq \sup_{x\in X}\Big(\sup_{y\in Y} f(x,y)\Big)=\alpha\,.$$

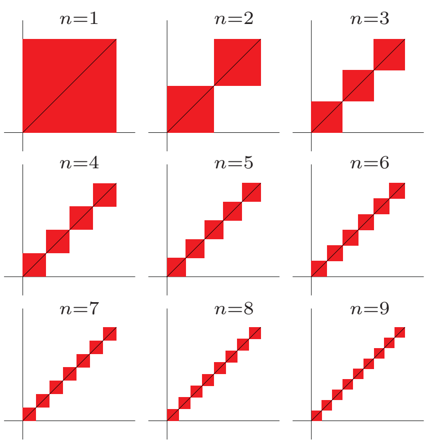
Sia invece $a<\gamma$. Allora esistono $x_0\in X$, $y_0\in Y$ tali che $a<f(x_0,y_0)$, e quindi

$$a<\sup_{y\in Y} f(x_0,y)\,, \qquad \text{per cui} \quad a<\sup_{x\in X}\Big(\sup_{y\in Y} f(x,y)\Big)=\alpha\,.$$

Dobbiamo concludere che $\alpha=\gamma$. Analogamente si vede che $\beta=\gamma$.

b. Siano $X=Y:=[0,1]$, $\mathcal{S}$ la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue in $[0,1]$, $\mathcal{T}$ l'insieme delle parti di $[0,1]$, V un sottinsieme di $[0,1]$ non misurabile secondo Lebesgue, $E:=\{(x,x) \ : \ x\in V\}$ e infine $f:=\chi_E$. Dimostriamo per cominciare che $E\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$. Possiamo scrivere che

$$E=([0,1]\times V)\cap D\,, \qquad \text{dove } D:=\big\{(x,x) \ : \ x\in[0,1]\big\} \text{ è la diagonale.}$$



Poiché $[0,1]\in\mathcal{S}$ e $V\in\mathcal{T}$, basta far vedere che $D\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$. Possiamo dimostrarlo elementarmente vedendo la diagonale come l'intersezione di una successione di unioni finite di quadratini

$$D=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\Big[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\Big]\times\Big[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\Big]\,,$$

(tralasciamo la verifica dell'uguaglianza e ci accontentiamo della figura qui accanto che mostra i casi $n=1,2,\dots,9$). Altro modo è di notare che D è un chiuso, e quindi boreliano, di $[0,1]^2$, e ricordare che la famiglia dei boreliani di $[0,1]^2$ coincide con la σ-algebra prodotto della famiglia dei boreliani di $[0,1]$ con se stessa; questa σ-algebra prodotto è contenuta a sua volta in $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$. Visto che $E\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$, la funzione $f=\chi_E$ è $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$-misurabile. Però per $x\in X$ fissato

$$\sup_{y\in Y} f(x,y)=\sup_{y\in Y}\chi_E(x,y)=\left\{\begin{matrix} 1 & \text{se } (x,x)\in E, \text{ cioè se } x\in V \\ 0 & \text{se } (x,x)\notin E, \text{ cioè se } x\notin V\end{matrix}\right\}=\chi_V(x)\,,$$

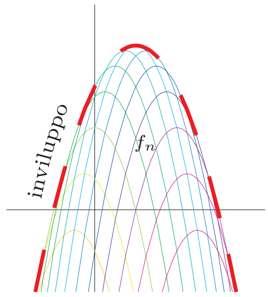
che non è una funzione $\mathcal{S}$-misurabile di x.

Osservazione. Supponendo che su $(Y, \mathcal{T})$ ci sia una misura positiva λ, che dire della $\mathcal{S}$-misurabilità di $x \mapsto \operatorname{sup\,ess}_{y \in Y,\, \lambda} f(x,y)$? Ebbene, in generale non c'è neppure questa. Basta prendere l'esempio di sopra e usare su Y la misura del conteggio, per la quale l'estremo superiore coincide con l'estremo superiore (l'unico insieme trascurabile è il vuoto).

Variante. X, Y come sopra, $\mathcal{S}$ la σ-algebra dei boreliani di $[0,1]$, $\mathcal{T}$ la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue di $[0,1]$, V un insieme di $[0,1]$ misurabile secondo Lebesgue ma non boreliano, $E := \{(x,x) \,:\, x \in V\}$, $f := \chi_E$.

Problema. Cosa succede se $X = Y = [0,1]$ e $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ sono entrambe la σ-algebra dei boreliani di $[0,1]$? (Non so la risposta).

c. Sia $a \in \bar{\mathbb{R}}$ tale che $f \le a$ ν-quasi ovunque. Allora per ogni $z \in Z$ $f_n \le f \le a$ ν-quasi ovunque e quindi $\operatorname{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f_n(z) \le a$ per ogni n e

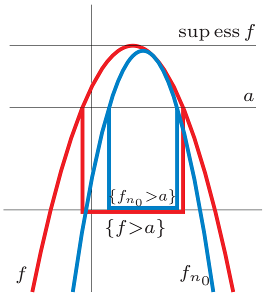


$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f_n(z) \Big) \le a\,.$$

Valendo questo per ogni $a > \operatorname{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f(z)$ abbiamo che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f_n(z) \Big) \le \operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f(z)\,.$$

Viceversa, sia $a < \operatorname{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f(z)$, cioè $\nu(\{f > a\}) > 0$. Poiché



$$\{f > a\} = \big\{\sup_n f_n > a\big\} = \big\{z \in Z \,:\, \exists n\ f_n(z) > a\big\} = \bigcup_n \{f_n > a\}\,.$$

Se un'unione numerabile di insiemi misurabili ha misura > 0, almeno uno degli insiemi deve avere pure misura > 0: esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\nu\big(\{f_{n_0} > a\}\big) > 0\,.$$

Ma allora non è vero che $f_{n_0} \le a$ ν-quasi ovunque. In altre parole $\operatorname{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f_{n_0} > a$, per cui

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f_n(z) \Big) > a\,,$$

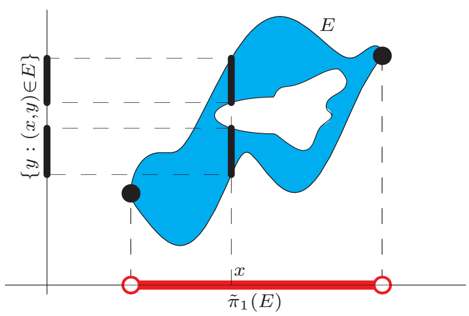
che implica che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f_n(z) \Big) \ge \operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f(z)\,.$$

Il risultato si può anche scrivere nella forma più simmetrica, come "commutazione" fra sup numerabile e sup ess:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} f_n(z) \Big) \ge \operatorname*{sup\,ess}_{z \in Z, \nu} \Big(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(z) \Big)\,.$$

d. È noto che le sezioni verticali di ogni insieme $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ sono $\mathcal{T}$-misurabili. Quindi per ogni $x \in X$ ha senso calcolare



$$\lambda\big(\{y \,:\, (x,y) \in E\}\big)\,.$$

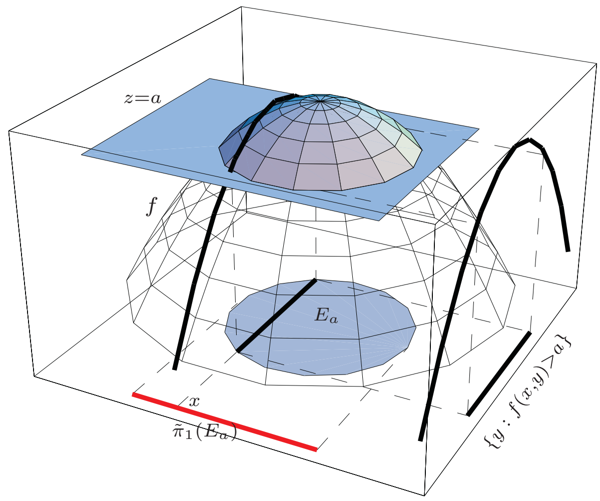
Inoltre se le misure sono σ-finite sappiamo che la funzione

$$x \mapsto \lambda\big(\{y \,:\, (x,y) \in E\}\big)$$

è $\mathcal{S}$-misurabile. Pertanto $\tilde{\pi}_1(E)$, che è l'insieme dove tale funzione $\mathcal{S}$-misurabile è > 0, è $\mathcal{S}$-misurabile.

e. Una funzione $g\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ è $\mathcal{S}$-misurabile se e solo se per ogni $a \in \bar{\mathbb{R}}$ si ha che

$$\{x \in X \;:\; g(x) > a\} \in \mathcal{S}\,.$$



La funzione da dimostrare misurabile è

$$g(x) := \operatorname*{sup\,ess}_{y\in Y,\;\lambda} f(x,y)\,.$$

Per ogni $x \in X$

$$g(x) > a \iff \operatorname*{sup\,ess}_{y\in Y,\;\lambda} f(x,y) > a \iff$$
$$\iff \lambda\bigl(\{y \in Y \;:\; f(x,y) > a\}\bigr) > 0\,.$$

Posto

$$E_a := \{(x,y) \in X \times Y \;:\; f(x,y) > a\}\,,$$

si ha che $E_a \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ perché f è $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$-misurabile, e

$$\begin{aligned}\bigl\{x \in X \;:\; g(x) > a\bigr\} &= \Bigl\{x \in X \;:\; \lambda\bigl(\{y \in Y \;:\; f(x,y) > a\}\bigr) > 0\Bigr\} = \\ &= \Bigl\{x \in X \;:\; \lambda\bigl(\{y \in Y \;:\; (x,y) \in E_a\}\bigr) > 0\Bigr\} = \\ &= \tilde\pi_1(E_a) \in \mathcal{S}\,.\end{aligned}$$

Per dimostrare l'uguaglianza fra l'estremo superiore essenziale in due variabili con l'estremo superiore essenziale "iterato", poniamo

$$\gamma := \operatorname*{sup\,ess}_{(x,y)\in X\times Y,\;\mu\otimes\lambda} f(x,y)\,.$$

Si ha che $f \le \gamma$ $\mu \otimes \lambda$-quasi ovunque, cioè

$$0 = (\mu\otimes\lambda)\Bigl(\bigl\{(x,y) \in X \times Y \;:\; f(x,y) > \gamma\bigr\}\Bigr) = \int_X \lambda\bigl(\{y \in Y \;:\; f(x,y) > \gamma\}\bigr)\,d\mu(x)\,,$$

per cui

$$\lambda\bigl(\{y \in Y \;:\; f(x,y) > \gamma\}\bigr) = 0 \qquad \text{per } \mu\text{-quasi ogni } x \in X\,,$$

cioè

$$\operatorname*{sup\,ess}_{y\in Y,\;\lambda} f(x,y) \le \gamma \qquad \text{per } \mu\text{-quasi ogni } x \in X\,,$$

da cui si ricava che

$$\operatorname*{sup\,ess}_{x\in X,\;\mu}\Bigl(\operatorname*{sup\,ess}_{y\in Y,\;\lambda} f(x,y)\Bigr) \le \gamma\,.$$

Sia invece $a < \gamma$. Allora

$$0 < (\mu\otimes\lambda)\bigl(\{f > a\}\bigr) = \int_X \lambda\bigl(\{y \;:\; f(x,y) > a\}\bigr)\,d\mu(x)\,,$$

per cui

$$0 < \mu\Biggl(\Bigl\{x \;:\; \lambda\bigl(\{y \;:\; f(x,y) > a\}\bigr) > 0\Bigr)\Biggr) = \mu\Bigl(\bigl\{x \;:\; \operatorname*{sup\,ess}_{y\in Y,\;\lambda} f(x,y) > a\bigr)\Bigr) = \mu\bigl(\{x \in X \;:\; g(x) > a\}\bigr)\,,$$

e di conseguenza

$$\operatorname*{sup\,ess}_{x\in X,\;\mu} g(x) > a\,,$$

che implica che

$$\operatorname*{sup\,ess}_{x\in X,\;\mu}\Bigl(\operatorname*{sup\,ess}_{y\in Y,\;\lambda} f(x,y)\Bigr) \ge \gamma\,.$$

Insieme alla disuguaglianza inversa ricavata prima, questo chiude la dimostrazione.

2. Supponiamo che Φ abbia le proprietà richieste. Sia M il sottospazio di H formato dalle combinazioni lineari finite di elementi della base hilbertiana. Se $v, w \in M$, cioè se esiste n tale che

$$v = \sum_{i \le n} \hat{v}(i) e_i \,, \qquad w = \sum_{j \le n} \hat{w}(j) e_j \,, \qquad \text{dove } \hat{z}(i) := (x \mid e_i)_H \text{ per } z \in H,\ i \in \mathbb{N},$$

per la bilinearità possiamo scrivere

$$\Phi(v, w) = \Phi\biggl(\sum_{i \le n} \hat{v}(i) e_i, \sum_{j \le n} \hat{w}(j) e_j\biggr) = \sum_{i,j \le n} \hat{v}(i)\hat{w}(j)\Phi(e_i, e_j) = \sum_{i,j \le n} \hat{v}(i)\hat{w}(j)\delta_{ij} e_i = \sum_{i \le n} \hat{v}(i)\hat{w}(i) e_i \,,$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker. Dunque Φ è univocamente determinato su $M \times M$. Ma M è denso in H, per cui $M \times M$ è denso in $H \times H$. L'unicità di Φ segue dal fatto che è continua e univocamente fissata su un sottinsieme denso del dominio. Per dimostrare l'esistenza prendiamo $x, y \in H$ e poniamo x_n, y_n le proiezioni di x, y sul sottospazio generato da $\{e_i \,:\, i \le n\}$:

$$x_n := \sum_{i \le n} \hat{x}(i) e_i \,, \qquad y_n := \sum_{j \le n} \hat{y}(j) e_j \,.$$

Poiché $x_n \to x$ e $y_n \to y$ per $n \to +\infty$, per la continuità di Φ deve valere

$$\Phi(x, y) = \lim_{n \to +\infty} \Phi(x_n, y_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i \le n} \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i \,.$$

L'ultimo limite esiste? La risposta è sì, in quanto la serie delle norme dei vettori $\hat{x}(i)\hat{y}(i)e_i$ è finita. Infatti per la disuguaglianza di Hölder per le serie

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \bigl\| \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i \bigr\|_H = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bigl| \hat{x}(i)\hat{y}(i) \bigr| \le \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} |\hat{x}(i)|^2} \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} |\hat{y}(i)|^2} = \|\hat{x}\|_{\ell^2} \cdot \|\hat{y}\|_{\ell^2} = \|x\|_H \cdot \|y\|_H < +\infty \,.$$

Il valore del limite è la somma della serie $\sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{x}(i)\hat{y}(i)e_i$, che converge a un vettore di H. Dunque deve essere necessariamente

$$\Phi(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i \qquad \forall x, y \in H \,.$$

Il secondo membro di questa formula è ben definito. Se dimostriamo che ha le proprietà richieste per Φ siamo a posto. Bilinearità e simmetria: per ogni $x, y, z \in H$ e per ogni scalare α

$$\begin{aligned}
\Phi(x + z, y) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (x + z \mid e_i)_H \cdot \hat{y}(i) e_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{z}(i)\hat{y}(i) e_i = \Phi(x, y) + \Phi(z, y) \,, \\
\Phi(\alpha x, y) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\alpha x \mid e_i)_H \cdot \hat{y}(i) e_i = \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i = \alpha \Phi(x, y) \,, \\
\Phi(x, y) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{y}(i)\hat{x}(i) e_i = \Phi(y, x) \,,
\end{aligned}$$

Rammentiamo che una mappa bilineare $\beta(x, y)$ è continua se e solo se esiste una costante $M \ge 0$ tale che $\|\beta(x, y)\| \le M\|x\| \cdot \|y\|$. Dunque Φ è continua perché

$$\begin{aligned}
\bigl\|\Phi(x, y)\bigr\|_H &= \biggl\| \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i \biggr\| \le \sum_{i \in \mathbb{N}} \bigl\| \hat{x}(i)\hat{y}(i) e_i \bigr\|_H = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bigl| \hat{x}(i)\hat{y}(i) \bigr| \le \\
&\le \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} |\hat{x}(i)|^2} \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} |\hat{y}(i)|^2} = \|x\|_H \cdot \|y\|_H \,.
\end{aligned}$$

Infine Φ non può essere suriettiva perché la successione dei coefficienti di Fourier di $\Phi(x, y)$ è sempre in $\ell^1(\mathbb{N})$, che è un sottinsieme proprio di $\ell^2(\mathbb{N})$. In altre parole

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \Bigl| \bigl(\Phi(x, y) \big| e_i\bigr)_H \Bigr| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bigl| \hat{x}(i)\hat{y}(i) \bigr| \le \|x\|_H \|y\|_H < +\infty$$

per cui per esempio se $z := \sum_{i > 0} e_i / i$ (serie che converge in H!) non appartiene all'immagine di H in quanto

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \bigl| (z \mid e_i)_H \bigr| = \sum_{i > 0} \frac{1}{i} = +\infty \,.$$